

25



EDITORIAL CCS

Ángel Hernández Jiménez

COMPRENDE Y OBSERVA LAS MATES

**Una experiencia diferente
aprendiendo matemáticas**

EDITORIAL CCS

COMPRENDE Y OBSERVA LAS MATES

Colección

CIUDAD DE LAS CIENCIAS

Serie EDUCADORES

1. La numeración y las cuatro operaciones matemáticas. J. A. Fernández Bravo.
2. Secuenciación de contenidos matemáticos I. J. A. Fernández Bravo / S. Atrio / F. Bandera.
3. Hablando de inventos... A. Rodríguez / A. M^a Rodríguez / F. López / M. Fernández / M. Romera.
4. La naturaleza del conocimiento. J. M^a López Sancho.
5. El número de dos cifras. J. A. Fernández Bravo.
6. Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor. V. Bermejo (coord.).
7. Procesos y técnicas de trabajo en ciencias físicas. J. Lahera / Ana Forteza.
8. La fotografía en el conocimiento del medio geográfico. M^a F. Álvarez.
9. Números en color. J. A. Fernández Bravo.
10. 1475 ítems de Física y Química. N. Moreno Díaz de la Riva.
11. Aprendiendo física básica en el laboratorio. J. Lahera.
12. Aprendiendo Ciencias de la Naturaleza en la cocina. M. Caballero.
13. Enseñar Historia del Arte. I. de la Cruz Solís.
14. Trabajar con mapas en Educación Secundaria. M. Á. Sandoya.
15. Competencia matemática en Primaria. M. Marín (coord.).
16. Cálculo mental en el aula. M. Ortiz.
17. Enseñar Ciencias Naturales en Educación Primaria. M. Caballero.
18. La resolución de problemas de geometría. A. Nortes Checa / R. Nortes Martínez-Artero.
19. Cálculo mental en el aula en el Primer Ciclo de Educación Primaria. M. Ortiz.
20. Problemas de exámenes de matemáticas y su didáctica. A. Nortes Checa / R. Nortes Martínez-Artero.
21. Cálculo mental en el aula en el Segundo Ciclo de Educación Primaria. M. Ortiz.
22. Actividades prácticas de matemáticas y su didáctica 1. A. Nortes (coord.).
23. Cálculo mental en el aula en el Tercer Ciclo de Educación Primaria. M. Ortiz.
24. Actividades prácticas de matemáticas y su didáctica 2. A. Nortes (coord.).
25. Comprende y observa las mates. Ángel Hernández.

Serie INGENIO

1. Problemas de ingenio para Primaria. M. Capó.
2. Problemas de ingenio para Primer Ciclo de Secundaria. M. Capó.
3. Problemas de ingenio para Bachillerato. M. Capó.
4. Problemas de ingenio para Segundo Ciclo de Secundaria. M. Capó.
5. Mate a las mates. M. Capó.
6. Puzles y matemáticas. M. Capó.
7. Del 1 al 9 cada número en su sitio. M. Capó.
8. Retos matemáticos para Primer Ciclo de Secundaria. J. D. Sánchez Torres.

Ángel Hernández Jiménez

COMPRENDE Y OBSERVA LAS MATES

**Una experiencia diferente
aprendiendo matemáticas**

EDITORIAL CCS

Página web de EDITORIAL CCS: www.editorialccs.com

© Ángel Hernández

© 2014. EDITORIAL CCS, Alcalá, 166 / 28028 MADRID

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Diagramación editorial: Nuria Romero

Diseño de portada: Olga R. Gambarte

ISBN (pdf): 978-84-9023-838-7

Índice

Para empezar

1. LOS NÚMEROS

1. QUÉ SON Y PARA QUÉ SIRVEN LOS NÚMEROS

2. NUESTRO SISTEMA DE NÚMEROS: EL SISTEMA NUMÉRICO DECIMAL

3. LOS NÚMEROS NATURALES

3.1. Cuáles son y para qué sirven

3.2. Los números primos y compuestos

3.3. Los números naturales y la recta numérica

4. LOS NÚMEROS NEGATIVOS Y LOS ENTEROS

4.1. Los números negativos

4.2. Los números enteros

4.3. Comparación y ordenación de números enteros. Representación en la recta numérica

5. LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

5.1. Cuáles son y para qué sirven

5.2. Fracciones equivalentes

5.3. Comparación de fracciones

5.4. Representación en la recta numérica de las fracciones

6. LOS NÚMEROS DECIMALES

6.1. Cuáles son

6.2. Unidad, décima, centésima y milésima

6.3. Cómo observar los números decimales

6.4. Comparación de números decimales

6.5. Los números decimales y las fracciones

6.6. Representación en la recta numérica de los números decimales

7. LOS NÚMEROS RACIONALES

8. EL CERO Y EL UNO

2. LAS OPERACIONES

1. OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

1.1. Aproximación al algoritmo de la suma

1.2. Aproximación al algoritmo de la resta

1.3. Aproximación al algoritmo de la multiplicación

1.4. Aproximación al algoritmo de la división

1.5. Propiedades de las operaciones aritméticas básicas: propiedad conmutativa, asociativa y distributiva

1.6. Iniciación a la potenciación

1.7. Raíz cuadrada

2. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

2.1. Suma de un número negativo

2.2. Resta de un número negativo

3. OPERACIONES CON NÚMEROS FRACCIONARIOS

3.1. Suma y resta de fracciones de igual denominador

3.2. Suma y resta de fracciones con distinto denominador

3.3. Fracción de un número

4. RAZÓN, PROPORCIÓN Y PORCENTAJE

5. PROPORCIONALIDAD

3. GEOMETRÍA

1. QUÉ ES Y PARA QUÉ SIRVE

2. ELEMENTOS BÁSICOS

2.1. El punto

2.2. La recta

2.3. El plano

2.4. Ángulos

3. LA GEOMETRÍA EN DOS DIMENSIONES: LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

3.1. Los polígonos

3.2. La circunferencia y el círculo

3.3. Cómo observar figuras geométricas

4. ÁREA Y PERÍMETRO DE UNA FIGURA

4.1. Perímetro

4.2. Área

5. LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

5.1. Qué son y cómo se clasifican

5.2. Cómo observar cuerpos geométricos

6. ÁREA Y VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

6.1. Cómo calcular el área de los cuerpos geométricos: poliedros y cilindros

6.2. Volumen de cuerpos geométricos

7. PLANO Y COORDENADAS CARTESIANAS

4. ESTADÍSTICA

1. QUÉ ES Y PARA QUÉ SIRVE LA ESTADÍSTICA

2. LOS DATOS

3. LA ORGANIZACIÓN DE LOS DATOS

4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS DATOS

5. LAS MEDIDAS DE POSICIÓN: LA MEDIA Y LA MODA

5.1. Media aritmética (o simplemente media)

5.2. La moda

6. MEDIDAS DE DISPERSIÓN: EL RANGO

7. LOS EXPERIMENTOS ALEATORIOS

7.1. Qué es un experimento aleatorio

7.2. La observación de los experimentos aleatorios

8. QUÉ ES LA PROBABILIDAD

... Y para terminar

Para empezar

Este es un libro destinado a cualquier persona que intervenga o quiera intervenir en la educación en matemáticas de niños de Primaria.

Mi hipótesis de partida es que cualquier persona con un coeficiente intelectual normal (el 75% de la población lo tenemos), no tendría por qué tener problemas en esta materia en los niveles de enseñanza obligatoria (aunque la realidad demuestra lo contrario). Si piensas de esta manera, este libro te puede ayudar a sacar de cada niño el matemático que lleva dentro.

¿Y por dónde empezamos? Muy sencillo, vamos a arrancar planteándonos la pregunta «qué son» las matemáticas. Puede parecer una tontada, pero te aseguro que no lo es. De hecho, considero que es fundamental para poderlas comprender. Y tengo la sensación que si realizásemos una encuesta preguntando «qué son», nos llevaríamos una desagradable sorpresa.

Hola matemáticas, adiós acertijos y curiosidades

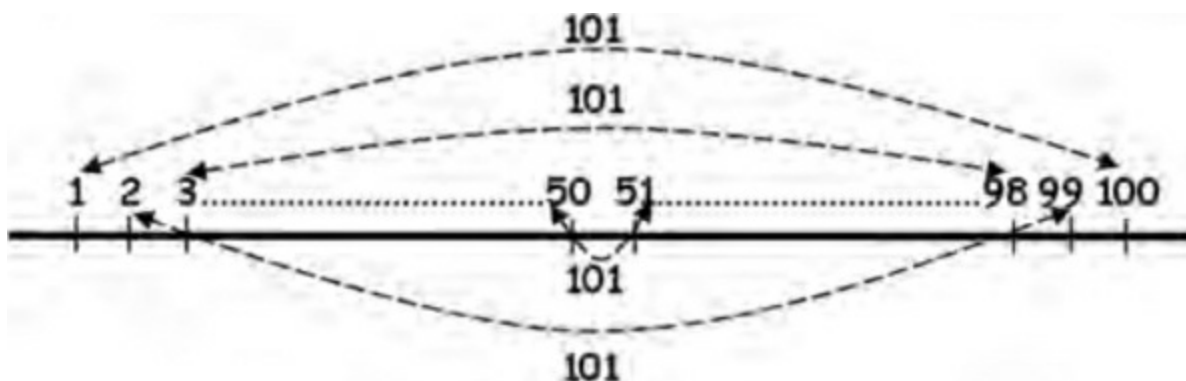
Vayamos al tema. Si te pregunto que me digas la edad de las tres hijas de Raquel, sabiendo que vive en el número 13 de la calle Principal, que el producto de las edades es 36, su suma igual al número de la casa y que la mayor no sabe andar en bicicleta, lo que te estoy haciendo es plantearte un «acertijo matemático» en el que usas mates para resolverlo (tiene solución, pero no pierdas el tiempo en ello). Si ahora yo te digo que $21 \times 24 = 12 \times 42$, es decir, que «si en el producto de 21 por 24 cambiamos el orden de las cifras de cada número el resultado es el mismo», lo que te estoy planteando es una

«curiosidad matemática». Pero si te pido que dibujes varias circunferencias de distinto tamaño y te digo que sea cual su tamaño, siempre se mantiene la misma relación entre su longitud y su diámetro, en concreto siempre la longitud es π -veces su diámetro, entonces estamos hablando de «matemáticas».

Y esto es lo que hay que tener claro, que las matemáticas no son un cúmulo de acertijos y curiosidades, sino que, sencillamente, tratan de buscar pautas, patrones o regularidades entre los objetos que estudian (como los números o las figuras geométricas, por ejemplo). Y esto no lo digo yo, sino un gran matemático como Poincaré («las matemáticas no estudian objetos, sino las relaciones entre objetos») o el Nobel de Física Feynman («las matemáticas son la búsqueda de pautas»). Relacionar la idea de lo que son las mates con las curiosidades y acertijos solo consigue una cosa: pensar que son para listos. No le hagas esto a un niño. Más bien, maravíllale con la idea de lo simple y perfecto que es nuestro sistema de números o con la manera de estudiar el espacio a través de la geometría partiendo de puntos, rectas y planos. Y aléjale de tópicos como que «la estadística te dice que si tu vecino tiene dos caballos y tú no tienes ninguno, los dos tenéis uno», que lo único que hacen es demostrar la ignorancia de quien los pronuncia.

Evidentemente esta concepción de las matemáticas como búsqueda de regularidades, debería conducir a trabajar con los estudiantes de Primaria bajo esta premisa, estimulando en ellos un tipo de razonamiento presente implícita o explícitamente en esta búsqueda: el razonamiento algebraico, clave para conseguir avanzar en el medio/largo plazo con solidez en el aprendizaje de las matemáticas y superar lo que podríamos llamar «el nivel de la regla de tres».

A lo largo del libro retomaré esta idea, que no me puedo resistir a ilustrarla con la archiconocida anécdota de infancia del príncipe de las matemáticas: Gauss. Te cuento. Siendo un niño y llevando poco tiempo asistiendo a la escuela, un día su maestro, ante la guerra que daban los niños en clase, les mandó que sumasen los cien primeros números: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 \dots$ hasta el 100. Al cabo de un rato el niño prodigio anotó en su pizarra el resultado: 5.050. El maestro, sorprendido, le preguntó cómo lo había calculado. Su argumento fue el siguiente: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, $4 + 97 = 101$, $5 + 96 = 101 \dots$ es decir, la suma del primer número más el último es igual a la del segundo más el penúltimo, y a la del tercero más el antepenúltimo... y así sucesivamente. Como de estas sumas en 100 números hay 50, entonces $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = 50 \times 101 = 5.050$.



Es el resultado correcto y algo fácil de calcular para alguien que ya sabe un poco de matemáticas (no es más que la suma de una progresión aritmética), pero para un niño que lleva poco tiempo acudiendo al colegio es una auténtica proeza.

La moraleja de esta anécdota es que observes cómo piensa de forma innata y con muy poco tiempo de aprendizaje la mente de un genio de las matemáticas, de alguien con capacidad para aportar nuevos conocimientos en este campo: buscó una regularidad, una pauta a la hora de sumar esos números. Y esto nos vuelve a recordar lo que son las matemáticas: búsqueda de pautas y regularidades.

La sociabilización en matemáticas

Estamos hablando de matemáticas básicas y niños. Queremos poner en contacto por primera vez ambos mundos. Si a este proceso le queremos dar un nombre, sería el de «sociabilización» en matemáticas.

Como cualquier proceso de sociabilización es fundamental que se haga de la forma correcta, pues es donde se desarrolla buena parte de las aptitudes y actitudes del niño hacia las mates. Su aprendizaje se tiene que convertir en una fuente de experiencias positivas y se debe realizar de una «manera natural». ¿A que nunca cuando has leído un cuento le has dicho: «Mira en la frase “el lobo es feroz”: “el” es un artículo determinante, “lobo” un sustantivo, “es” la tercera persona en singular del tiempo presente del verbo ser y “feroz” un adjetivo calificativo»? Y sin embargo, el niño entiende perfectamente lo que quiere decir esta frase. Pues en matemáticas lo mismo.

Supongo que no nacemos con una aversión natural hacia las matemáticas, sino que más bien es un comportamiento adquirido. Destacaré dos cuestiones clave para evitarlo:

1. Transmitir la idea de que las matemáticas son fáciles. Si cuando tratas de explicar algo a una persona le empiezas diciendo que es fácil, su mente se relaja y su predisposición para aprender es buena. Como le transmitas la idea de que es difícil, ¡lo tienes claro! Acabas de empezar a construir una barrera psicológica que lo único que consigue es ponerle en un estado de alerta que disminuye de manera significativa su capacidad de comprensión y aprendizaje. Así que ya sabes, ¡no hay que crear barreras mentales!, que con el tiempo se van a hacer más grandes. Y por favor, recuerda esta frase de uno de los grandes matemáticos del siglo XX, John Von Neumann: «Si la gente no piensa que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida».

2. Hay que disfrutar de las matemáticas. Uno de los grandes problemas de las mates es que para comprenderlas y dominarlas hay que pensar. Y pensar es una actividad cerebral que desgasta y cansa e incluso a algunas personas parece que les produce dolor (para Antonio Machado, «de diez cabezas, nueve embisten y una piensa»). Por eso es importante que los niños se diviertan y disfruten aprendiendo mates. Pensar en algo divertido, entretenido y que despierta tu curiosidad es una actividad placentera. Por el contrario, el aburrimiento es el enemigo número uno de la motivación y del aprendizaje. Esto me obliga a hacer de este libro una experiencia entretenida para ti como lector (y espero que así sea).

También te digo que es un libro centrado en el desarrollo, el análisis y la explicación de los conceptos básicos que tiene que aprender un estudiante de Primaria, dejando a un lado otros aspectos relevantes del aprendizaje de las matemáticas, como puede ser el operativo.

El resto del libro está organizado en cuatro bloques: números, operaciones, geometría y estadística. No hay un bloque específico dedicado al álgebra porque está implementado y subyace al resto de bloques.

1

NÚMEROS

Los números son la puerta de entrada de un niño al mundo de las matemáticas; las nociones que aprenden sobre ellos tienen un gran peso en el proceso de sociabilización en matemáticas.

Al acabar Primaria, un estudiante debe tener claro una serie de cuestiones. A grandes rasgos son:

1. Qué son los números y para qué sirven.
2. Cómo se forman (el sistema numérico decimal).
3. La estructura de los distintos conjuntos de números que conoce: naturales, enteros y racionales.

Comencemos por la primera.

1. QUÉ SON Y PARA QUÉ SIRVEN LOS NÚMEROS

Creo que muchos de nosotros cuando éramos pequeños, en eso que llamábamos párvulos y que ahora se llama Educación Infantil, nos hemos aburrido de hacer palotes. Era la forma tradicional de empezar a enseñar a contar con números, por lo menos en mi escuela. Según la profesora iba trazando palotes en la pizarra, todos repetíamos al unísono: ¡uno!; que trazaba otro, pues ¡dos!; otro más, ¡tres!... Y de esta forma íbamos aprendiendo a representar las cantidades que contábamos con números.

I = 1, II = 2, III = 3, IIII = 4, IIIII = 5, IIIIII = 6, IIIIII = 7...

Es decir, los números, esas primeras palabras que uno aprende del lenguaje de las matemáticas, en principio no son más que una forma de representar una cantidad de algo. Así de simple. Ese «algo» pueden ser ovejas en un rebaño, patatas en un saco, caramelos en una bolsa, palomas en un parque, coches aparcados en una calle... Si además tenemos en cuenta que el ser humano para relacionarse/comunicarse con los demás, y comprender el mundo que le rodea, necesita contar (y, por tanto, representar las cantidades que cuenta), es fácil de entender que los números sean utilizados como herramienta de comunicación.

Para ver más claro lo que pretendo decirte, supongamos que vas a comprar una bici para tu hijo. Después de estar esperando un cuarto de hora, el vendedor se acerca y te pregunta la edad que tiene y cuánto mide: imaginemos que le contestas que 9 años y 135 centímetros, por ejemplo. Según esto, te recomienda una bici con ruedas de 20 pulgadas. Miras la bici y ves que tiene 2 platos, de 22 y 32 dientes, y 6 piñones, que van desde 14 a 20 dientes. El cuadro es de aluminio, y el peso de la bici 12 kg. Es recomendable para un uso moderado, no más de 1.000 km al año. Su precio es de 190 euros, pero este mes tiene un descuento del 8%. Moraleja: como ves en una escena tan normal y cotidiana como puede ser la descrita, los números han aparecido por todos los lados, los datos que recibimos han sido mayoritariamente transmitidos a través de números, y la información que nos interesaba tenía mucho que ver con contar y medir ciertas características de la bicicleta.

Por ponerte otro ejemplo: voy conduciendo mi coche (un 3 puertas de 1.500 centímetros cúbicos y 85 caballos), me suena el teléfono, veo en pantalla que es Atención al Cliente de mi compañía, no lo cojo, son 4 puntos del carné. Todavía me quedan 87 kilómetros para llegar a mi destino, a ver si llego antes de las 11 de la mañana, por lo que decido acelerar un poco, meto la 5ª velocidad y me pongo a 120 km/h. En el cuadro de instrumentos se me enciende una luz: la de la reserva de gasolina, me quedan 2 litros en el depósito. Sigo circulando y un cartel indica gasolinera 24 horas. Me desvío, llego a ella y paro el coche frente al surtidor. No sé si echarle gasolina de 95 o de 97 octanos. Decisión: la más barata. Echo 20 litros y me dirijo a la caja a pagar. Soy el tercero en la cola. Me toca mi turno: surtidor 4, ¿verdad?, me dice la dependienta. Son 29 euros, ¿efectivo o tarjeta?, me vuelve a preguntar. Efectivo respondo. Me voy después de caer en la compra impulsiva de un paquete de 10 chicles (1 euro más). Por fin arranco. Ha pasado media hora

desde que salí de casa. A ver si llego en 45 minutos. Moraleja: la misma que la del ejemplo anterior, y puedes coger cualquier escena de tu vida diaria que te vas a dar cuenta de la cantidad de veces que has utilizado los números para transmitir/recibir información relacionada con algo que nos encanta y necesitamos: contar. Este es el uso inicial y principal de los números, pero también cubren la necesidad de ordenar, medir e identificar/codificar, como ya veremos más adelante.

La cuestión es cómo trasladar estas ideas a un niño. Que comprenda que con los números puede contar objetos no es problema, lo que considero que puede ser más complicado es que comprenda su utilidad como mecanismo de comunicación. Pero es necesario que lo entienda para que perciba las matemáticas como algo tangible y práctico.

Una estrategia para ello puede consistir en tomar fotografías donde aparezcan números y analizar la información que transmiten. Por ejemplo, los números que aparecen en el marcador de un campo de fútbol o de baloncesto, nos indican el tiempo que falta para acabar el partido y el tanteo; el envase de una lata de sardinas tiene un número con las que contiene; una señal de tráfico puede tener un número que indica la velocidad que no se puede superar; un tique de compra contiene los números con los precios de los artículos... Los ejemplos son interminables, es cuestión de pensar y observar.

Como verás a lo largo del libro, la estrategia de realizar fotos del mundo que nos rodea en las que observemos los conceptos/elementos de las matemáticas que va aprendiendo un niño es recurrente. Es más, considero que crear un álbum de fotos matemáticas como actividad es una labor más que interesante, de alto valor didáctico, por varias razones:

- Hacer fotografías es una actividad entretenida que va a permitir a los niños disfrutar las mates.
- Les obliga/estimula a pensar en el concepto matemático que tienen que reflejar en la foto.
- Mejora la capacidad de observación al tratar de buscar dónde se plasma en el mundo real las matemáticas.
- Contribuye a percibir las como algo tangible.

Si además tenemos en cuenta la accesibilidad de la tecnología necesaria (con la cámara del móvil vale), el asunto queda bastante claro. Incluso puede ser más interesante en el tiempo extraescolar hacer unas fotos, que hacer unas cuentas.

Una vez analizada la importancia que tiene para un niño comprender lo que

son y para qué sirven los números, pasamos a otra cuestión: cómo se construyen, es decir, cómo funciona el sistema de números que nosotros utilizamos: «el sistema numérico decimal», la primera estructura de las matemáticas que va a aprender y, por tanto, a empezar a aplicar el razonamiento algebraico. Ni que decir tiene lo relevante de este asunto. Si conoce al dedillo su construcción y funcionamiento, comprender la manera que tenemos de sumar, restar, multiplicar, comparar y ordenar números, etc., es relativamente sencillo.

2. NUESTRO SISTEMA DE NÚMEROS: EL SISTEMA NUMÉRICO DECIMAL

Su construcción han sido siglos de matemáticas y hay tres ideas principales que hay que tener claras sobre él.

Primera idea: para construir los números solo se usan diez signos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. A estos signos les llamamos cifras, y cada una representa un valor diferente.

Segunda idea: el valor de las cifras también depende de la posición que ocupan dentro del número (unidades, decenas, centenas, millares...).

En el número 555, el primer cinco representa un valor de 5 centenas (500 unidades), el segundo cinco de 5 decenas (50 unidades) y el tercero de 5 unidades:

$$555 = 5 \text{ centenas} + 5 \text{ decenas} + 5 \text{ unidades} = 500 + 50 + 5$$

Tercera idea: agrupaciones de diez. Así, 10 unidades son una decena, 10 decenas son una centena, 10 centenas son un millar... Es decir, que los valores de las diferentes posiciones se relacionan a través del número 10: una unidad de un orden tiene un valor de 10 unidades del orden anterior. Por eso a nuestro sistema de números se le llama decimal.

Básicamente esto es lo fundamental del sistema de números que nosotros utilizamos. En palabras del famoso físico y matemático Laplace: «La idea de representar todos los números con diez signos, asignándoles además de un valor por su forma otro por su posición, es tan sencilla, que en virtud de esta sencillez resulta difícil imaginarse en qué medida es admirable esta idea».

Un niño, al acabar Primaria, tendría que ser plenamente consciente de

cómo funciona el sistema numérico decimal y eso es muy fácil de comprobar si le damos una taza llena de garbanzos, le pedimos que los cuente y construya el número que representa esa cantidad, ¡pero con una condición!: solamente puede contar con los dedos de las manos y, por tanto, no se pueden contar más de diez seguidos. Esto es muy importante. Si comprende bien cómo se construyen los números irá agrupando los garbanzos de la taza que va contando en grupos o montones de 10 (decenas). Una vez hecho esto, contará las decenas que ha formado y si hubiese hubiese 10 o más, sencillamente el niño repetiría el proceso: cada 10 montones de 10 garbanzos los agrupará en otro más grande que ahora tiene 10 decenas (1 centena ,100 garbanzos). De esta manera, por ejemplo, después de haber agrupado todos los garbanzos de la taza, le pueden haber quedado 3 centenas y 5 decenas y 4 garbanzos sueltos (unidades) y formar por tanto el número 354:

$$3 \text{ centenas y } 5 \text{ decenas y } 4 \text{ unidades} = 354 = 300 + 50 + 4$$

La importancia de comprender esta forma de razonar viene dada porque está utilizando el razonamiento algebraico, está aplicando las leyes de un modelo y esto son matemáticas. El niño tiene que quedar maravillado con lo que ha aprendido: partiendo de tan solo contar con los dedos, ha llegado a poder contar cualquier cantidad de cualquier cosa y formar el número que la representa. Ha sido así gracias a las mates.

¿Pero cómo hacer observar en nuestra vida cotidiana el funcionamiento del sistema numérico?

Muy fácil, un cuentakilómetros de un coche, de una moto o de una bici puede valer. Se pone a cero y a partir de ahí, a observar. Así de sencillo, solo hay que fijarse cómo van cambiando los dígitos a medida que avanzan los kilómetros. Evidentemente esta es una práctica que en un aula no se puede llevar a cabo, salvo de manera virtual a través de un simulador en ordenador. Y recuerda que todo lo que se observa se puede fotografiar.

Ahora pasaremos a ver los distintos tipos de números que se estudian en Primaria (naturales, fraccionarios, enteros y decimales). De cada uno de ellos iremos viendo los aspectos más relevantes: cuáles son, para qué sirven, cómo compararlos, cómo observarlos en la vida diaria y algún detalle más.

3. LOS NÚMEROS NATURALES

3.1. Cuáles son y para qué sirven

Los primeros números que el ser humano utilizó para contar son los llamados naturales, los primeros que se aprenden en el colegio: el 0, 1, 2, 3, 4, 5... aunque para algunos el 0 no es un número natural (sobre esto no hay unanimidad, pero eso da igual de momento).

$$N = (0, 1, 2, 3, 4, 5...)$$

Al conjunto de los números naturales se le denota con la letra N.

Puede ser interesante, desde el punto de vista didáctico, proponer al niño que establezca un listado de las cosas que se pueden contar con números naturales, y mejor si lo acompaña de una foto (como si fuera un álbum): usamos números naturales para contar el número de hijos de una familia, el número de ovejas de un rebaño, las manzanas que da un manzano, los CDs vendidos por un grupo de música o las descargas ilegales que han tenido, el número de personas agregadas a tu Facebook, los visitantes de una web, los turistas que van a la costa de vacaciones, los peregrinos del Camino de Santiago, los zapatos (camisas o pantalones) que guardas en el armario, las veces que has subido una montaña o has visitado una ciudad, los invitados al cumpleaños de tu hijo, los semáforos que tienes hasta llegar al trabajo (o las paradas de metro o autobús), los goles que se meten en un partido de fútbol o los ensayos en uno de rugby, los participantes en una carrera popular o en el Tour de Francia, el número de manifestantes en una huelga, el número de pueblos de una provincia o sus habitantes, las medallas olímpicas obtenidas por un país... Y podría seguir y seguir con muchos más ejemplos.

Pero como bien sabes no usamos solo los números naturales para contar, sino también para ordenar, para determinar una posición: primero, segundo, tercero, cuarto, quinto... Esto es fácil de hacer comprender a un niño con tan solo observar la clasificación de cualquier competición deportiva (atletismo, Fórmula 1, moto GP, fútbol, balonmano, carreras de caballos...).

A estos dos usos principales de los números naturales, como son el contar y ordenar, hay que añadir un tercero cada vez más en auge: el de identificar/codificar, es decir, tú número de DNI, el PIN del teléfono (o de la

tarjeta de crédito), el número de cuenta bancaria, número de la seguridad social, códigos postales, claves de usuario de banca electrónica, número de tarjeta de crédito, códigos de barras, matrículas de coches...

En conclusión, un estudiante de Primaria tiene que tener claro los tres usos de los números naturales: contar, ordenar e identificar.

3.2. Los números primos y compuestos

Para que un estudiante llegue a comprender lo que es un número primo, previamente debe conocer y manejar los conceptos de divisor y divisibilidad de un número (todos los números que dividen a un número de forma exacta, es decir, que dan como resultado un número entero, son divisores del número y cuando un número es divisor de otro, también se dice que es divisible por él).

Pues bien, aquellos números naturales (o enteros positivos) mayores que 1 que solo son divisibles por el 1 y por sí mismos, se llaman números primos.

Números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37...).

Al resto de números naturales se les llama compuestos. Así, el 15 es divisible por 1, 3, 5 y 15, y no solo por 1 y él mismo (el 15), por tanto, es compuesto.

Al número 1 (porque se ha decidido así) no se le considera ni primo ni compuesto.

Por tanto, los números naturales están formados por el 1, los números primos y los compuestos.

La cuestión más relevante para un niño de los números primos es que cualquier número natural (salvo el 0) se puede construir o representar de forma única como el producto de números primos. Este es un resultado que le debiera maravillar, de la misma forma que lo ha hecho a todos los matemáticos a lo largo de la historia, y se conoce como el «Teorema fundamental de la aritmética». Justifica que se les pueda considerar como los átomos de las matemáticas:

$$4 = 2 \times 2, 6 = 3 \times 2, 8 = 2 \times 2 \times 2, 10 = 2 \times 5, 21 = 3 \times 7$$

Los números primos no se pueden construir como el producto de otros

primos. Y por cierto, hay infinitos números primos.

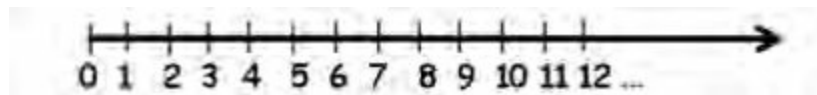
Pero, ¿para qué valen, dónde los podemos observar?

Para un niño su principal utilidad está asociada al concepto de máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Por otro lado, tienen una aplicación práctica concreta en la criptografía, es decir, en las técnicas de cifrado/codificado que pretenden asegurar la confidencialidad de la información que se transmite (por ejemplo en transacciones bancarias o comerciales en la red, presentación telemática de documentos...).

Un detalle. Podría ser interesante plantear a un estudiante de Primaria la siguiente cuestión: ¿II, III, V, VII, XI... son números primos? El objetivo es claro: fijar la idea que el concepto de número primo es independiente del numeral que le representa (el 2 y el II representan el mismo valor).

3.3. Los números naturales y la recta numérica

La recta numérica es una forma de empezar a tener una visión geométrica de los números (imaginamos que en el espacio se sitúan a lo largo de una línea recta).



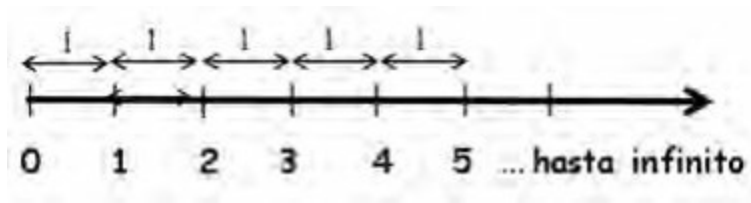
Esta recta es muy útil desde el punto de vista didáctico: permite ver lo que ocurre cuando a un número le sumamos o le restamos otro, comparar números, empezar a tener una noción del concepto de distancia o de dispersión en estadística...

Un detalle. A lo mejor a un niño le cuesta entender por qué los números en la recta están separados a la misma distancia unos de otros. Sencillamente le dices que siempre para pasar de un número al siguiente sumamos la misma cantidad: 1.

$$1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4...$$

Por esta misma razón hay infinitos números naturales, no se acaban nunca. ¡Siempre puedo encontrar un número más grande con tan solo sumar 1 al anterior! Es la forma más simple de acercarse a la idea de infinito, un concepto que más adelante a cualquier estudiante le puede llegar a crear algún dolor de

cabeza. De momento no.



4. LOS NÚMEROS NEGATIVOS Y LOS ENTEROS

4.1. Los números negativos

Un estudiante de Primaria tiene que comprender que los números naturales no son suficientes para contar todas las cosas que nos rodean. Lo puede entender a través de un ejemplo clásico, como el del ascensor: la planta baja es el 0, la primera el 1 (una por encima de la baja), la segunda el 2 (dos plantas por encima de la baja) y así sucesivamente..., de la misma forma que el primer sótano está numerado como -1 (uno por debajo de la planta baja) y el segundo como sótano -2 (dos por debajo de la baja).

Otros ejemplos clásicos en los que aparecen números negativos:

- Para medir la temperatura se utiliza una escala que incluye números negativos: las temperaturas bajo cero.
- Para medir la altitud se establece el cero en el nivel del mar, de esta forma las montañas tienen altitudes positivas, mientras que los fondos marinos tienen altitudes negativas.

Por el contrario, carece de sentido o no es natural contar el número de hijos de una familia con números negativos, en un hogar no hay -2 hijos, ni cuando vas al supermercado compras -5 kilos de patatas.

También se debe observar que con los números naturales no solucionamos el problema de restar a un número otro mayor que él ($7 - 9 = ?$) o resolver una ecuación del tipo $7 - x = 9$. Los números negativos solucionan este problema. Por ejemplo, los alumnos de una clase han organizado una fiesta para sacar dinero para una excursión a la nieve. Han vendido entradas por valor de 100 euros pero se han gastado en decoración 120 euros, es decir, el beneficio ha sido de -20 euros. Se acabó la excursión.

Para dar entrada al concepto de número entero hay que tener en cuenta

que todos los opuestos de los números naturales son números negativos. El opuesto del 5 es el -5 ; el del 12, el -12 ; el del 34, el -34 ; etc.

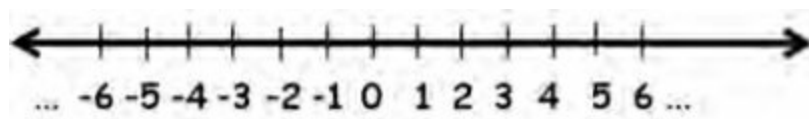
4.2. Los números enteros

Entonces si a los números naturales (1, 2, 3, 4, 5...) le añadimos sus opuestos (-1 , -2 , -3 , -4 , -5 ...) y el 0, se forma otro conjunto de números: el de los números enteros, que se denota con la letra Z.

$$Z = (\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\dots)$$

El cero no es positivo ni negativo.

4.3. Comparación y ordenación de números enteros. Representación en la recta numérica



Posiblemente un termómetro clásico (de los que tienen el tubito) para medir la temperatura ambiental sea el objeto en el que mejor se puede observar la recta numérica de los enteros.

Es interesante que un niño observe que el punto central de la recta es el 0, y lo que es muy importante, que lo tome como un punto de referencia:

- A la derecha del cero están los números enteros positivos, ordenados en sentido creciente (+ 1, + 2, + 3, + 4, + 5, + 6...).
- A la izquierda del cero están los números enteros negativos, es decir, los opuestos de los anteriores, pero ordenados en sentido decreciente. Un niño tiene que entender por qué el -5 es un número más pequeño que el -3 (por ejemplo), es decir, que estos números son más pequeños cuanto más lejos estén del 0. Para que lo entienda, puedes usar estos ejemplos: el tercer sótano de un edificio (el -3 que marcan en los ascensores) está más bajo que el primer sótano (el -1) porque está más lejos de la planta de calle (el 0) y de las siguientes, como la primera (el 1). Una temperatura de -14 grados (o catorce

grados bajo cero) es una temperatura más baja que -7 grados (o siete grados bajo cero) porque está más alejada de los 0 grados y, por tanto, de cualquier temperatura positiva.

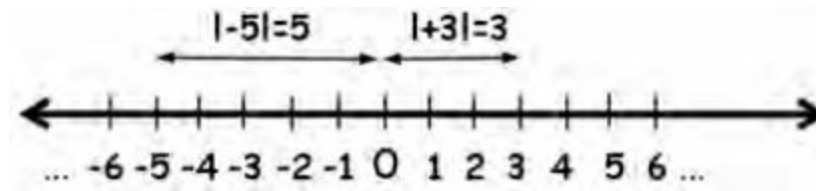
Para recoger esta idea de cercanía o lejanía respecto del 0, podemos usar el concepto de «valor absoluto de un número», que de momento un niño lo puede interpretar como la distancia que le separa del cero. De esta forma, el $+7$ está separado por una distancia de 7 unidades del 0, de la misma manera que el -4 está separado del 0 por una distancia de 4 unidades (NO de -4 unidades, las distancias no pueden ser negativas, de Madrid a Valencia no hay -300 kilómetros). En definitiva, el valor absoluto de un número es el propio número pero sin signo.

Como para representar simbólicamente el valor absoluto de un número se escribe el número entre dos palos, tenemos que:

$|+3| = 3$ que se interpreta que el $+3$ está a una distancia de 3 unidades del 0.

$|-5| = 5$ que se interpreta que el -5 está a una distancia de 5 unidades del 0.

A través de la recta numérica se fija muy bien esta idea:



Pues bien, haciendo uso del valor absoluto, podemos ordenar y comparar números enteros. Muy fácil, solo hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Si comparo dos números enteros positivos, el que tenga mayor valor absoluto es mayor. Esto es evidente: el que tenga mayor valor absoluto está más a la derecha en la recta numérica.
- Si comparo dos números enteros negativos, el que tenga mayor valor absoluto es menor porque se encuentra más a la izquierda en la recta numérica (más alejado del 0 y, por tanto, del punto a partir del cual empiezan los enteros positivos).
- Si comparo un número entero positivo con uno negativo, siempre es mayor el positivo. ¡Siempre!

También es interesante que en esta recta un estudiante de Primaria observe un par de detalles. El primero, que el 0 es mayor que cualquier número

negativo y menor que cualquier positivo; y el segundo detalle, que la distancia a la que están del 0 un número entero positivo y su opuesto es la misma, por ejemplo el +3 y el -3 están los dos a una distancia de 3 unidades del 0.

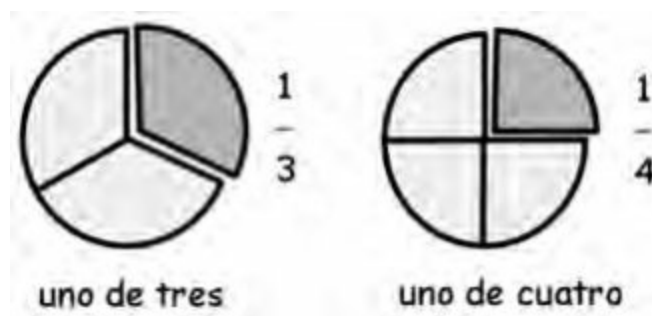
Evidentemente, con los números enteros podemos contar y medir más cosas que solo con los naturales, ¡pero no todas!

5. LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

5.1. Cuáles son y para qué sirven

Supongamos que cogemos una pizza, la partimos en tres porciones iguales (del mismo tamaño) y a ti te doy una. Si te pregunto, ¿cuánta pizza te has comido? Evidentemente puedes responder que una porción, es cierto. Pero si te hubiera preguntado cuánto te has comido en relación al total de la pizza, probablemente me hubieras dicho que una porción de tres o un tercio de la pizza. En esta respuesta has tenido en cuenta cómo habías partido la pizza, ¡has usado el número fraccionario $1/3$!

Si la hubiéramos partido en cuatro trozos iguales y te hubiera dado uno, te habrías comido uno de cuatro o un cuarto, que en número fraccionario es $1/4$. Y si te hubiera dado 3, te habrías comido tres de cuatro o tres cuartos, que en número fraccionario es $3/4$. Resumiendo, el concepto de fracción (o quebrado) soluciona el problema de contar cuando dividimos algo en partes iguales (relación parte vs todo). Esta es la primera idea que debemos grabar en la mente de un estudiante de Primaria y que se puede ilustrar con cualquier plato que se pueda partir en raciones: una tarta, una tortilla de patata, un pan, una barra, una empanada... o con una jarra de agua... o con una simple cuerda que doblamos en partes iguales (por la mitad, en tres partes, cuatro...).



Como hemos dicho, con los números fraccionarios contamos en relación a la partición del total de algo, por ello para construirlos, necesitamos 2 números, uno que indique el número de partes que forman el total que hemos dividido (denominador) y otro, las que contamos o tomamos de este total (numerador). Estos dos números los ponemos uno encima de otro y separados por una raya. Por cierto, para que un niño no se líe con las posiciones, te propongo una buena regla nemotécnica: numerador empieza con las mismas letras que nube ¿y dónde está la nube? Arriba, en el cielo. Pues eso.

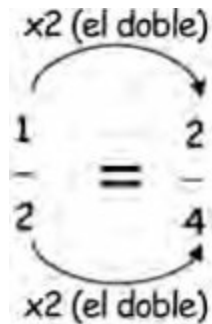
Al igual que con los números naturales y enteros, es más que interesante y recomendable para fijar el concepto de número fraccionario realizar una lista con ejemplos de donde observarlos y si se puede acompañar de alguna foto, mejor.

Valga a modo de ejemplo:

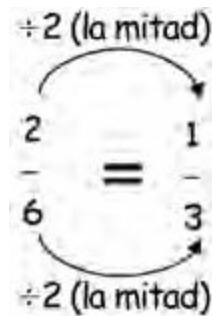
- En una carrera de 7 etapas se han recorrido 4, luego ya se ha corrido $\frac{4}{7}$ de la carrera y quedan por recorrer 3, es decir $\frac{3}{7}$.
- De una botella de agua me he bebido la mitad, que es lo mismo que dividir la botella en dos partes y beberme una, es decir $\frac{1}{2}$.
- El coche ha consumido 9 litros de los 30 que tiene el depósito, es decir $\frac{9}{30}$.
- A 2 jugadores de un equipo de fútbol les han expulsado, o lo que es lo mismo, han expulsado a $\frac{2}{11}$ del equipo.
- En un aparcamiento de 95 plazas hay 7 libres, es decir, 7 de 95, $\frac{7}{95}$.
- Tal montañero ha subido 12 de los 14 ocho miles del planeta, es decir, $\frac{12}{14}$.
- Tu hijo ha sacado notable en 2 de las 9 asignaturas, es decir, $\frac{2}{9}$.
- Se han construido 234 km de los 250 km de la autovía, es decir, $\frac{234}{250}$.
- Han venido 4 de los 9 invitados al cumpleaños, es decir, $\frac{4}{9}$.
- Me quedan en el disco duro 20 gb libres de las 250 que tiene, es decir, $\frac{20}{250}$.
- He escuchado 25 de las 49 canciones que llevo en el MP4, es decir, $\frac{25}{49}$.
- Me quedan 2 horas de clase de las 5 que voy todos los días, es decir, $\frac{2}{5}$ y, por tanto, he ido 3 horas, es decir, $\frac{3}{5}$.
- He puesto en la mesa 2 de los 4 vasos que pongo todos los días para comer, es decir, $\frac{2}{4}$.
- Tal jugador ha metido 3 de los 5 goles de su equipo, es decir, $\frac{3}{5}$.

5.2. Fracciones equivalentes

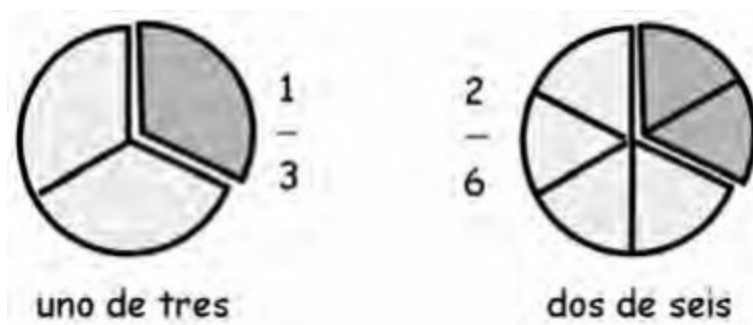
Si una barra de pan la parto en dos trozos y me como uno, es lo mismo que si la parto en cuatro trozos (el doble) y me como dos (también el doble). En números fraccionarios estaríamos diciendo que $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$.



De la misma manera, si una pizza la parto en seis porciones y me como dos, es lo mismo que si la parto en tres (la mitad) y me como una (también la mitad). En números fraccionarios estaríamos diciendo que $\frac{2}{6}$ es equivalente a $\frac{1}{3}$.



Gráficamente sería:



Es decir, dos fracciones son equivalentes cuando valen lo mismo (representan la misma cantidad).

Evidentemente para obtener fracciones equivalentes solo hay que multiplicar (o dividir) el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número (da igual el que sea, pero que sea el mismo).

Este es un resultado clave para entender cómo comparar fracciones o cómo sumar/restar números fraccionarios.

5.3. Comparación de fracciones

Hay que distinguir dos casos: que el denominador sea el mismo o que sea diferente.

Mismo denominador: un niño tiene que entender por qué para comparar fracciones con el mismo denominador basta con fijarse en el numerador: el que sea mayor es una fracción mayor.

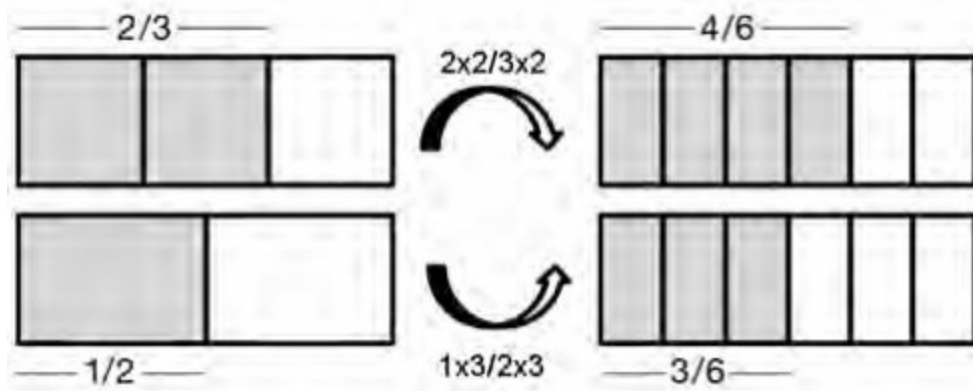
Supongamos que coges dos tartas (una para ti y otra para mí) del mismo tamaño y las divides en el mismo número de raciones, en 4 por ejemplo. De tu tarta te comes 2 raciones, y yo de la mía me como 3. ¿Quién ha comido más? Pues yo evidentemente, me he comido 3 de cuatro raciones ($3/4$ de la tarta) y tú solo 2 ($2/4$ de la tarta).



¿Y si la tarta la hubieras dividido en 5 raciones en vez de cuatro?. La respuesta sería la misma, yo he comido más, me hubiese comido tres de cinco ($3/5$) y tú dos de cinco ($2/5$). Es decir, que mientras tu tarta y la mía estén partidas en el mismo número de raciones (cantidad del denominador), con tan solo saber el número de raciones que nos hemos comido cada uno (número del numerador) vale para saber quién ha comido más.

Diferente denominador: si queremos comparar $2/3$ con $1/2$, lo ideal sería transformarlos de alguna manera en otros números fraccionarios que siguieran representando estas cantidades (fracciones equivalentes), pero tuviesen el

mismo denominador, es decir, un denominador común. Así, de esta forma estaríamos en el caso anterior (mismo denominador) y solo tendríamos que comparar los numeradores. Un estudiante tiene que entender que es posible hacer esta transformación con tan solo multiplicar el denominador y numerador de cada una por el denominador de la otra. Por ejemplo, si queremos comparar como hemos dicho $\frac{2}{3}$ con $\frac{1}{2}$, multiplicamos y dividimos por 2 al primer número fraccionario y por 3 al segundo, obteniendo de esta forma fracciones equivalentes con el mismo denominador, que son las que vamos a utilizar para comparar: $\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{4}{6}$ y $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{3}{6}$.



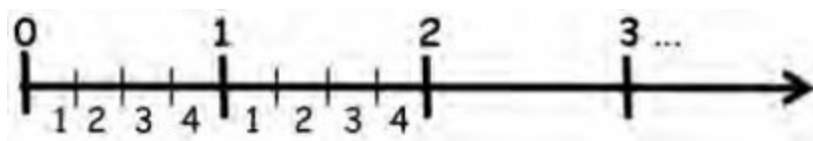
Como $\frac{4}{6}$ es mayor que $\frac{3}{6}$, entonces $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$: si como 2 porciones de una tarta partida en 3 raciones estoy comiendo más que si la parto en 2 y me como 1. Gráficamente se ve bastante claro.

5.4. Representación en la recta numérica de las fracciones

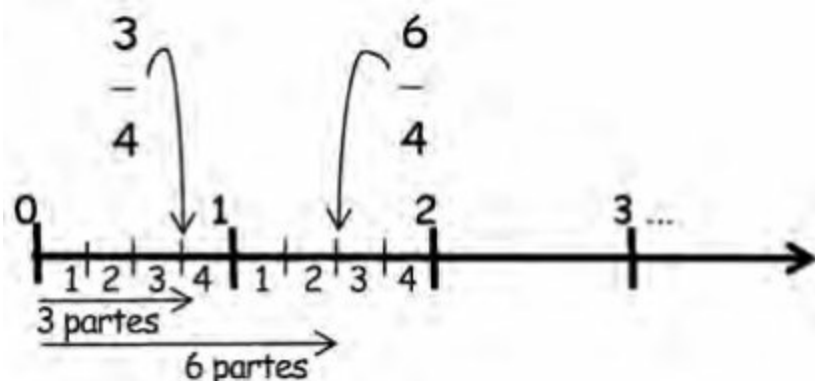
Para representar en la recta numérica un número fraccionario, los pasos que hay que dar son muy sencillos.

Por ejemplo, queremos representar el $\frac{3}{4}$ y el $\frac{6}{4}$.

1. Dividimos cada unidad en tantas partes como indique el denominador, que en este ejemplo serían 4.



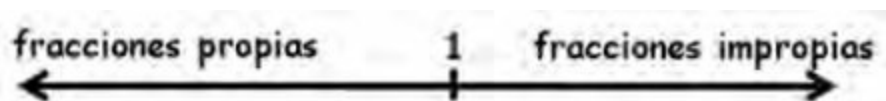
- Contamos las partes que indica el numerador y lo señalamos en la recta, que en este caso serían 3 y 6.



Como vemos, $\frac{3}{4}$ es un número que queda comprendido entre 0 y 1, mientras que $\frac{6}{4}$ es un número que queda comprendido entre 1 y 2. Este resultado se tiene que aprender a escribir:

$$0 < \frac{3}{4} < 1 \text{ y } 1 < \frac{6}{4} < 2$$

Las fracciones que están situadas a la derecha del 1 tienen el numerador mayor que el denominador (impropias). En cambio, las fracciones que están a la izquierda del 1 tienen el numerador menor que el denominador (propias).



Evidentemente, un niño tiene que comprender la interpretación de una fracción impropia. Cuando sepa sumar fracciones le resultará más sencillo: $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$, que en términos de pizza significa comerse una entera y una ración más.

6. LOS NÚMEROS DECIMALES

6.1. Cuáles son

Los números decimales son números que tienen dos partes: una entera y una decimal, separadas por una coma baja « $,$ » o coma alta « $'$ ». Son una forma de

expresar números no enteros.



La parte entera está formada por números enteros. Para que un niño entienda lo que es la parte decimal, solo hay que introducirle los conceptos de décima, centésima y milésima.

6.2. Unidad, décima, centésima y milésima

Para construir los números partíamos de la unidad, el 1 (o unidad simple). Cuando sumábamos 10 veces el 1 obteníamos la decena, cuando sumábamos 10 decenas o 100 unidades, teníamos la centena y así sucesivamente. Esto tiene que estar claro para el niño.

Entonces si ahora le propones coger el 1 y, en vez de sumarlo, lo divide en 10 partes, obtiene un número más pequeño que el 1, aunque mayor que el 0: la décima. Y ahora si a su vez divide la décima en otras diez partes iguales o, lo que es lo mismo, divide el 1 en 100 partes iguales, obtiene lo que llamamos centésima, que es más pequeño que el 1 y que la décima (ejemplo de ello con alto valor didáctico lo tenemos en el sistema monetario). Si repite el proceso y divide en diez partes la centésima o, lo que es lo mismo, divide el 1 en 1.000 partes iguales, entonces obtiene la milésima, más pequeña que la centésima (y mayor que cero).

Décima = la unidad dividida en 10 partes.

Centésima = la décima dividida en 10 partes (o la unidad dividida en 100).

Milésima = la centésima dividida en 10 partes (o la unidad dividida en 1.000).

$$0 < \text{milésima} < \text{centésima} < \text{décima} < 1$$

En cuanto a la posición de las cifras en los números decimales, hay que

distinguir entre parte entera y decimal:

- En la parte entera como siempre, es decir, de derecha a izquierda: unidades, decenas, centenas, millares...
- En la parte decimal, de izquierda a derecha, tenemos: décimas, centésimas, milésimas...

Por ejemplo, sea el número decimal 23,179

Parte entera		Parte decimal		
Decenas	Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas
2	3	1	7	9

Cualquier estudiante tiene que entender la lógica de colocar las posiciones de los decimales de esta forma: mantener la estructura de nuestro sistema de formación de números: «1 unidad de una posición tiene un valor de 10 unidades de la que se sitúa a su derecha». Este es un detalle MUY importante.

1 unidad = 10 décimas, 1 décima = 10 centésimas, 1 centésima = 10 milésimas

6.3. Cómo observar los números decimales

Aunque sea repetitivo, al igual que con los números naturales, enteros y fraccionarios, es más que interesante y recomendable realizar una lista y tomar fotos con ejemplos de donde observarlos. Tenemos multitud de posibilidades:

- En los surtidores de las gasolineras, el precio del combustible (gas-oil 1,42 euros) y los litros que has repostado (35,6 litros).
- El peso que aparece en las pantallas de las básculas de supermercados cuando nos pesan el producto (sección de carnicería, charcutería, pescadería o frutería) y en los tiques que expenden. En las etiquetas de estos productos cuando están envasados. 0,550 kg de carne picada, 2,5 kg. de naranjas, 1,2 kg de queso...
- En competiciones deportivas de atletismo: el ganador en velocidad ha hecho un tiempo de 11,44 segundos o en salto de longitud ha saltado

7,95 metros, o en salto con pértiga ha superado los 5,95 metros

- En carreras de Fórmula 1 y moto GP: la vuelta rápida se ha dado en 1,245.
- La nota de un examen: en matemáticas un 7,8.

Para que un niño de Primaria perciba la importancia de los números decimales en nuestra vida cotidiana, se suele acudir a ejemplos basados en medidas. Pero cuidado, que podemos estar cometiendo un error con el argumento que utilicemos. Me explico: «Si en una prueba de salto de longitud, solo midieran el salto que da el atleta en cantidades enteras de metros, difícilmente habría un solo ganador, puede que varios hubiesen saltado más de 8 metros y menos de 9. Entonces para evitar esta situación, se mide con un número decimal, que aporta más precisión: así uno saltará 8,15 metros, otro 8,46, otro 8,72 y podremos determinar quién es el ganador». Pues bien, este es un argumento «erróneo», pues no necesito un número decimal para determinar el ganador, puedo usar cantidades enteras con tan solo dar el resultado en centímetros: uno saltó 815 cm, otro 846 cm, etc.

La utilidad en este sentido de los números decimales es su capacidad para simplificar y expresar cantidades. Es más cómodo y simple para el carnicero decir: «Pesa 2,485 kg, ¿quiere que ponga un poco más?», que decir pesa: «2 kg, 4 hectogramos, 8 decagramos y 5 gramos», de esta forma ya no le quedarían ganas de preguntar si quieres un poco más, no sea que digas que sí y tenga que volver a repetir el peso. O si me preguntan por un número próximo a $\frac{3}{2}$ es más fácil pensar en este como 1,5 y decir como número cercano el 1,48 o el 1,51.

6.4. Comparación de números decimales

Para comparar y ordenar números decimales la norma es muy sencilla, y como siempre, si se comprende bien cómo están contruidos, no tiene ninguna dificultad.

Un número decimal es un solo número, que representa una única cantidad, aunque digamos que esté formado por dos partes, la entera y la decimal. Pero su construcción posicional sigue los mismos principios, sea la cifra de una parte u otra, no hay discontinuidad entre ambas: una unidad de un orden cualquiera representa 10 unidades del orden inmediatamente inferior. Por ello, creo conveniente a la hora de comparar tratarlos de esta forma, no separando

la comparación en parte entera y decimal.

Por ejemplo: 3,48 es mayor que 1,45 porque su cifra en la posición de mayor orden es mayor (3 es mayor que 1), de la misma forma que 3,48 es mayor que 3,21 porque aunque la cifra de mayor orden sea la misma, la siguiente es mayor (4 es mayor que 2), pero es irrelevante que esta pertenezca a la parte decimal del número.

Una buena regla práctica para comparar números decimales es escribir uno debajo de otro haciendo coincidir las posiciones de sus cifras, para luego ir comparándolas una por una empezando por la izquierda, hasta que encontremos una diferente; pero insisto que es irrelevante que sea de la parte entera o decimal.

3,48	3,48	3,48
1,45	3,21	3,42

6.5. Los números decimales y las fracciones

La definición de número fraccionario como cociente de dos enteros permite a un estudiante de Primaria conocer la relación entre los números decimales y los fraccionarios: un número fraccionario tiene asociado un número decimal con un valor que se corresponde con hacer la división entre numerador y denominador.

Por ejemplo, si en el número $20/8$ hacemos la división de 20 entre 8, obtenemos un número decimal: el 2,5.

$$\frac{20}{8} = 20 \div 8 = 2,5$$

De la misma forma, a un número decimal en muchas ocasiones (pero no siempre, como ocurre en los números irracionales aunque estos no son de momento objeto de estudio) se le puede asociar un número fraccionario. Por ejemplo: 0,75 es igual a $3/4$. En conclusión, una misma cantidad puede ser expresada de dos formas distintas: fraccionaria y decimal (aunque a un niño le pueda parecer paradójico, pues tiende a pensar que los números decimales miden con más precisión que los fraccionarios).

La forma más simple para pasar de un número decimal a uno fraccionario es haciendo uso de las «fracciones decimales», que son fracciones en las que el denominador vale 10, 100, 1.000, 10.000... Por ejemplo:

3,8 es igual a $38/10$

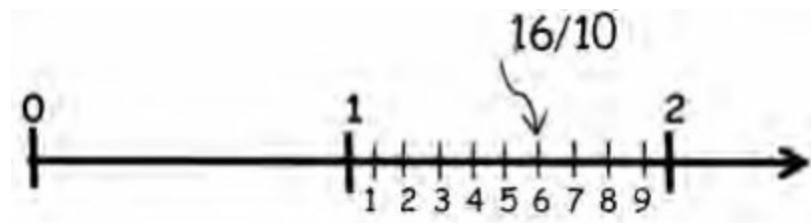
3,85 es igual a $385/100$

3,856 es igual a $3856/1000$

Teniendo en cuenta esto, la décima es $1/10 = 0,1$, la centésima es $1/100 = 0,01$ y la milésima $1/1000 = 0,001$.

6.6. Representación en la recta numérica de los números decimales

El principal detalle a tener en cuenta es consecuencia de la relación entre los números fraccionarios y los decimales que acabamos de ver: si todo fraccionario admite una forma decimal y un niño de Primaria no conoce todavía los números que admiten forma decimal pero no fraccionaria (irracionales), entonces los huecos o posiciones que ocupan en la recta numérica ambos tipos de números son los mismos (y evidentemente no son todos, como por ejemplo el ocupado por la raíz cuadrada de 2 o el número π). Por ejemplo, el 1,6 ocupa la misma posición que el $16/10$.



De esta forma la densidad de la recta numérica con los números decimales que maneja un niño de Primaria es la misma que con los fraccionarios, pero desde el punto de vista didáctico facilitan comprender la idea de densidad; es decir, que dados dos números racionales, siempre se puede encontrar otro entre ellos.

lleguen a crear algún dolor de cabeza a un estudiante de Primaria en el futuro (sobre todo el 0). Pero es interesante que tenga presente sus peculiaridades.

El uno

- El 1 representa la unidad y se puede obtener al dividir cualquier número por sí mismo (salvo el 0, ¡ya estamos con el 0!).

$$a/a = 1 \text{ con } a \text{ distinto de } 0$$

$$8/8 = 1$$

$$3/3 = 1$$

- En los números naturales, con tan solo sumar 1 a cualquier número, obtengo el siguiente número natural:

$$1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4, 4 + 1 = 5 \dots$$

- Si multiplicamos cualquier número por 1, el resultado es el propio número:

$$a \times 1 = a$$

$$8 \times 1 = 8, 23 \times 1 = 23$$

- Lo mismo que si dividimos cualquier número (incluido el 0) entre 1, el resultado es el propio número:

$$a/1 = a$$

$$9/1 = 9, 22/1 = 22$$

- En la potenciación, un número elevado al exponente 1, es igual al propio número:

$$a^1 = a$$

$$6^1 = 6, 12^1 = 12$$

- Las potencias con base 1 y exponente mayor que 0 valen 1 (evidentemente dejamos de lado los casos con exponente 0 o números negativos):

$$1^n = 1$$

$$1^2 = 1, 1^3 = 1$$

El cero

- Representa una cantidad nula y se puede representar como la suma de un número y su opuesto:

$$a + (-a) = 0$$

$$3 + (-3) = 0, 8 + (-8) = 0$$

- Si a un número le sumo o resto 0, el resultado es el propio número:

$$a + 0 = a, a - 0 = a$$

$$3 + 0 = 3, 8 - 0 = 8$$

- En la multiplicación, cuando multiplico cualquier número por 0, el valor del producto es también 0:

$$a \times 0 = 0$$

$$3 \times 0 = 0, 8 \times 0 = 0$$

- En la división, cuando divido 0 entre cualquier número (salvo él mismo), el resultado es de 0 (si no tengo nada para repartir, da igual entre cuántas partes lo reparta: a todas les toca 0):

$$0/a = 0 \text{ con } a \text{ distinto de cero}$$

$$0/4 = 0, 0/21 = 0$$

- Las potencias con base 0 y exponente mayor que 0 valen 0:

$$0^n = 0$$

$$0^2 = 0, 0^3 = 0$$

En definitiva, lo que interesa es que los niños de Primaria perciban los números 0 y 1 como un poco diferentes a los demás.

Con esto damos por terminado el bloque de los números y pasamos al de las operaciones. Ahora toca sumar, restar... es decir, realizar con ellos las operaciones aritméticas. Las vamos a ver para los números naturales, fraccionarios y enteros.

Siguiendo con la filosofía de este libro, nosotros nos vamos centrar en los fundamentos de estas operaciones, en el concepto de lo que son y para qué sirven.

2

LAS OPERACIONES

1. OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

Un estudiante de Primaria tiene que observar que cuando suma, resta, multiplica o divide está solucionando un problema de manera «inteligente», en vez de solucionarlo de forma «bruta». ¿Y cuál es el problema y la forma bruta de resolverlo? Vayamos operación por operación.

Suma. Cogemos dos tazas llenas de garbanzos y supongamos que en una hay 954 y en otra 1.823 garbanzos. Nuestro problema es saber cuántos garbanzos hay entre las dos y la solución «bruta» de resolverlo sería juntarlos en un solo montón ¡y a contar desde el primero hasta el último! Es probable que un niño intuya que esta forma de proceder le tendría todo el día contando.

Resta. El problema que se nos presenta es el siguiente: nos dan una taza con 2.775 garbanzos y nos piden que digamos cuántos quedan después de quitar 1.349. Una manera de hacer esto es ir sacando de la taza uno a uno los 1.349 garbanzos y contar los que quedan. Al igual que en la suma, es fácil intuir que esta forma de proceder te va a llevar toda la tarde. Y si hay que repasar la operación, ni te cuento.

Multiplicación. 98 personas tienen una taza con el mismo número de garbanzos: 3.584. Nuestro problema es saber los garbanzos que tienen entre todas. Aquí hay dos soluciones: una la «muy bruta», que sería juntar los

garbanzos de todas las tazas en un solo montón ¡y a contar!, y otra menos bruta, que consistiría en hacer una gran suma, de 98 veces la cantidad de 3.584. Como siempre, se puede observar que son soluciones largas y tediosas.

División. Tenemos una taza con 3.950 garbanzos y los quiero repartir entre 2 personas de tal manera que a cada una le toque la misma cantidad. ¿Cuántos garbanzos le tocan a cada una? La «solución bruta» de este problema pudiera consistir en sacar de la taza los garbanzos de 2 en 2 (uno para ti otro para mí) hasta que se acabaran (o no quedasen suficientes para sacar otros dos), e ir contando las veces que he hecho esto.

Creo que queda claro por qué lo hemos llamado la solución «bruta».

Un niño de Primaria tiene que percibir claramente que con las operaciones aritméticas que aprende y la forma de realizarlas está aprendiendo una manera «inteligente» de solucionar los problemas de añadir, quitar o repartir cantidades.

Y además es importante que se dé cuenta de que hacer las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) es muy fácil si domina el proceso de formación de los números. De todas formas aunque no nos ocupemos en profundidad en este libro de los algoritmos, es necesario comprender sus fundamentos.

1.1. Aproximación al algoritmo de la suma

Queremos sumar 324 y 563. Podemos proceder de la manera reflejada en la siguiente tabla:

1º: descomponemos		2º: agrupamos
300	500	800
20	60	80
4	3	7
324	563	887

Como vemos, para sumar solo tenemos que descomponer cada número de

forma aditiva canónica, es decir, asociando a cada cifra la cantidad de unidades que representa. A continuación agrupamos (sumamos) las cantidades asociadas al mismo orden (filas) y por composición aditiva canónica ya podemos formar el número final con el resultado de la suma: 887.

Este proceso de «descomposición-agrupamiento» puede ser necesario realizarlo más de una vez antes de llegar a dar el resultado final. Se correspondería con las famosas «llevadas» del algoritmo que tradicionalmente aprende un niño. Por ejemplo: queremos sumar 546 y 289:

Descomponemos		Agrupamos	Descomponemos		Agrupamos
500	200	700	700	100	800
40	80	120	20	10	30
6	9	15	5		5
546	289				835
1ª iteración			2ª iteración		

Como vemos, después de descomponer-agrupar la primera vez, algunos de los números que quedan en cada orden (fila) incluyen cifras en posiciones diferentes al orden que representan (como el 1 en el 120 y el 15), por tanto, se pueden volver a descomponer de forma aditiva canónica para seguir agrupando cantidades asociadas al mismo orden y por composición formar el número con el resultado final de la suma. En la descomposición de la 2ª iteración es evidente observar que la columna de la derecha se correspondería con las llevadas del algoritmo tradicional. También hay que señalar que si sumásemos más de dos números, es posible que se necesitase iterar más veces el proceso de «descomponer-agrupar». En conclusión, sumar es muy sencillo con tan solo saber descomponer/componer de forma aditiva canónica los números y teniendo en mente una idea física o tangible como es la de agrupar. En principio, este tipo de descomposición aditiva tendría que ser muy natural para un niño, es como leer los números; asimismo, agregar cantidades que solo tienen una cifra distinta de 0 (múltiplos de 10, 100...), tampoco debiera presentar una gran dificultad, aunque el procedimiento descrito de descomposición reiterada puede ser largo cuando sumo muchos números de muchas cifras.

Entonces la cuestión es la siguiente. Supongamos que trabajo en una

oficina. Mi labor solo consiste en sumar grandes listas de números con lápiz y papel. Mi jefe me da a elegir entre sumar según el modelo de «descomposición aditiva canónica reiterada» que acabamos de ver u otro que solo requiere de una iteración y tener en cuenta una cosa que se llaman «llevadas». Decido probar este último y veo su eficacia. Es perfecto, sintetiza en un paso todo el proceso del otro. En mi trabajo es el que voy a usar. ¿Pero es deseable que mis hijos lo utilicen en el colegio para aprender a sumar? Sí, siempre que sea explicado con comprensión y no como un mero proceso mecánico. El motivo es muy simple. El algoritmo de las llevadas, llamémosle si queremos «tradicional», es la culminación de la comprensión de cómo funciona la operación suma con el sistema numérico decimal, pero es un resultado final que puede dificultar, a quien está aprendiendo, comprender el proceso y aplicar el «razonamiento alge-braico», clave para «sociabilizar» con éxito a un niño en matemáticas.

Y este mismo argumento es válido para el resto de algoritmos tradicionales de resta, multiplicación y división. Por eso es recomendable utilizar métodos para aprender estas operaciones, que estimulen el pensamiento algebraico junto con el aritmético, para lograr una enseñanza de la aritmética más sugestiva que fomente el aprendizaje con comprensión y conseguir una cosa muy importante: capacitar al niño para las matemáticas y que él perciba que se siente capacitado para ellas.

1.2. Aproximación al algoritmo de la resta

Queremos restar $467-254$. Podemos proceder de la manera reflejada en la siguiente tabla.

1º: descomponemos		2º: restamos
400	200	200
60	50	10
7	4	3
467	254	213

Como vemos, para restar solo tenemos que descomponer cada número de forma aditiva canónica, a continuación restamos las cantidades asociadas al mismo orden (filas) y ya podemos formar por composición aditiva canónica el número final con la diferencia: 213.

Pero qué pasa cuando una o varias de las cifras del minuendo es menor que la correspondiente por posición del sustraendo. Sencillamente estamos en la resta con llevadas del algoritmo tradicional. Por ejemplo, queremos restar 423 y 257:

Descomponemos		Balanceo		Restamos
400	200	400	200 + 100	100
20	50	20 + 100	50 + 10	60
3	7	3 + 10	7	6
423	257			166

Como vemos, al restar las unidades asociadas al mismo orden, en las decenas y las unidades el minuendo es menor que el sustraendo, lo que daría lugar a números negativos. Para evitar este problema aplicamos el álgebra: $X - Y = X - Y + a - a = (X + a) - (Y + a)$, donde «a» es una cantidad que nos asegure que $(X + a)$ es mayor o igual que Y . Las cantidades representadas por «a» que utilizamos en el balanceo son las llevadas. En este caso sumamos las unidades que necesitamos en las posiciones de las decenas y unidades, y aunque nos baste con al menos 30(50 - 20) y 4(7 - 3) respectivamente, para seguir manejando la descomposición aditiva canónica de los números añadimos 100 y 10. Esta forma de proceder es la que sigue el algoritmo tradicional, pero de manera sintética, trabajando directamente con las cifras de las posiciones (no con las unidades que representan).

Al igual que en el caso de la suma, desde el punto de vista didáctico, el algoritmo tradicional dificulta entender el proceso de la resta que se ve de forma más clara según la tabla expuesta, por «descomposición aditiva canónica balanceada».

También se puede resolver el problema que acabamos de ver (que una[s] cifra[s] del minuendo es[son] menor[es] que la correspondiente del sustraendo)

de otras formas que no necesitarían de las clásicas «llevadas», como por ejemplo traspasando en el minuendo de unas posiciones a otras las unidades que necesitemos. Así, en la operación 73-24, si traspasamos 10 unidades (1 decena) de la posición de las decenas a la de la unidades, ya se puede realizar la resta tal y como se ve en la tabla contigua.

Descomponemos		Traspaso de unidades		Restamos
70	20	$70 - 10 = 60$	20	40
3	4	$3 + 10 = 13$	4	9
73	24	73	24	49

Este balanceo, solo del minuendo, puede que sea más intuitivo y fácil de comprender para un niño que el realizado con las «llevadas», pero cuantas más soluciones conozca (y comprenda) para un mismo problema, mejor.

1.3. Aproximación al algoritmo de la multiplicación

Sumar y restar tienen en la mente de un niño una fuerte componente intuitiva derivada de la idea física o tangible de juntar o quitar. En el caso de la multiplicación esto no es tan evidente, pero la idea de forma abreviada de una suma repetida es un concepto que le tiene que quedar fijado (aunque, como veremos con los números fraccionarios, es una idea que puede ser insuficiente).

En cuanto al algoritmo, supongamos que queremos multiplicar 456 por 3. Nosotros sabemos que estamos sumando 3 veces el 456:

456 x 3	Productos parciales
400 x 3	1.200
50 x 3	150
6 x 3	18
	1.368

Como se observa, lo que hacemos es descomponer de forma aditiva canónica el número y sumar las unidades de cada orden tantas veces como indica la cuenta, para así, mediante la suma de los productos parciales, formar el número con el resultado final. De manera general, esto se puede hacer a través de una tabla de doble entrada, que luego el algoritmo tradicional de la multiplicación se encarga de sintetizar. Por ejemplo 789×23 :

	20	3	sumas
700	14.000	2.100	16.100
80	1.600	240	1.840
9	180	27	207
sumas	15.780	2.367	18.147

Resumiendo, al multiplicar de esta manera lo que hacemos es descomponer los factores de forma aditiva canónica y aplicar la propiedad distributiva.

1.4. Aproximación al algoritmo de la división

La idea que transmitimos a un niño respecto del concepto de división, es la de reparto de una cantidad en partes iguales. Pero a efectos de cálculo es conveniente entender que cuando dividimos, estamos calculando las veces que un número está contenido dentro de otro. De esta forma, el proceso de búsqueda de las cifras que forman el cociente se hace más comprensible (números que al multiplicar al divisor dan como resultado una cantidad igual o menor que la que tome del dividendo).

Queremos dividir 125 entre 6:

	Dividendo	Divisor	Cociente	Resto	
1 ^a interacción	100	6	16	4	
	20	6	3	2	
	5	6	–	5	
			19	11	Suma
2 ^a interacción	10 1	6	1	4	
		6	–	1	
			20	5	Suma

Como se observa, el algoritmo es muy sencillo. En la primera iteración, descomponemos el número 125 de forma aditiva canónica y vamos dividiendo las unidades asociadas a cada orden entre 6. Sumamos los restos de estas divisiones parciales, que da un valor de 11, como es un número mayor o igual que 6 (el divisor), y podemos seguir repartiendo cantidades enteras, así que hay que volver a iterar el proceso tomando como dividendo este resto. En esta segunda iteración, el proceso termina porque la suma de los restos vale 5, y es menor que el divisor (6). Sumo los cocientes de las distintas divisiones parciales y tengo el resultado final: el cociente es 20 (y me sobran 5).

Entender este algoritmo es sencillo, pues lo único que hace es repartir la cantidad total, pero por partes y volviendo a iterar el proceso tantas veces

como sea necesario en función del valor de los restos acumulados de las divisiones parciales. Este es un buen ejemplo de cómo un simple proceso iterativo y sistemático en un número de pasos finito permite llegar a obtener una solución, una manera de resolver problemas muy utilizada desde que estamos en la era de las computadoras. Como siempre, el algoritmo tradicional sintetiza este proceso (entre otras cosas no acumula los restos), pero dificulta su entendimiento.

1.5. Propiedades de las operaciones aritméticas básicas: propiedad conmutativa, asociativa y distributiva

Propiedad conmutativa

Conmutar significa intercambiar, y esta propiedad, en el caso de la suma, nos dice que cuando sumamos dos números el orden es irrelevante:

$$24 + 38 = 38 + 24$$

$$a + b = b + a$$

La forma en la que un niño puede comenzar a comprender esta propiedad se puede corresponder con una idea física intuitiva: que las cantidades no varían aunque las ordenemos de otra manera. Si en una estantería hay cinco peluches, aunque les cambiemos de orden, sigue habiendo los mismos. Es decir, posiblemente asocia la disposición de los objetos en el espacio con esta propiedad. Pero que perciba la propiedad conmutativa como una propiedad algebraica es otra cuestión.

Es interesante darse cuenta de que la propiedad conmutativa la podemos observar con bastante frecuencia en nuestra vida diaria, y la cuenta de un supermercado, tienda de ropa, restaurante... es un buen escaparate para ello. Te explico. Coge una cuenta del supermercado. Evidentemente observas que los artículos que has comprado están en la lista ordenados de arriba abajo (cada uno con su precio) y al final del listado aparece el total de la cuenta, lo que hay que pagar. El orden en el que aparecen imprimidos en el tique se corresponde con el orden en el que la cajera los ha ido pasando por el lector del código de barras, entonces la cuestión es, ¿si pasa primero la barra de pan

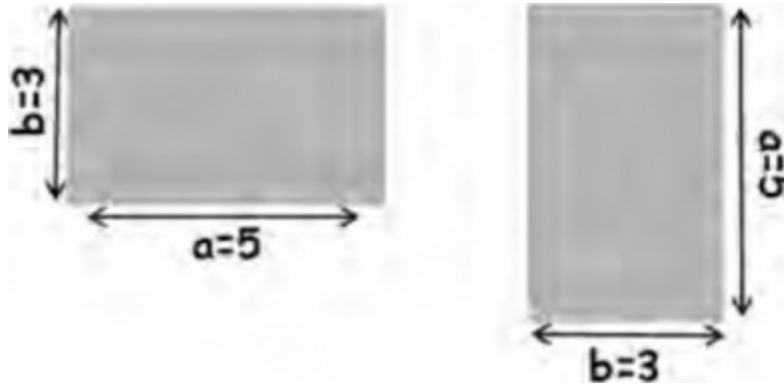
y luego la lechuga, pago lo mismo que si lo hace al revés? La respuesta es obvia, dado que se cumple la propiedad conmutativa de la suma. Imagina el caos que se produciría en las cajas si el orden en el que pasan los artículos por el lector afectase a lo que pagamos: todos a buscar aquel orden que minimizase o hiciese más pequeño el valor de la cuenta ¡a la cajera la volveríamos loca!

Al igual que la suma, la multiplicación tiene la propiedad conmutativa:

$$2 \times 4 = 4 \times 2$$

$$a \times b = b \times a$$

Gráficamente esto se observa al calcular el área de un rectángulo: si giramos el rectángulo su área sigue siendo la misma:



En cambio, la resta no cumple la propiedad conmutativa:

$$4-6 \text{ es distinto de } 6-4.$$

Si tengo 4 euros y me gasto 6 a alguien le debo 2 euros; en cambio si tengo 6 euros y me gasto 4, todavía me quedan 2 euros. Son dos situaciones muy diferentes.

Propiedad asociativa

La propiedad asociativa de la suma te dice que si sumo tres o más números da igual cómo los agrupe, el resultado es el mismo.

$$6 + 7 + 8 = (6 + 7) + 8 = 6 + (7 + 8)$$

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

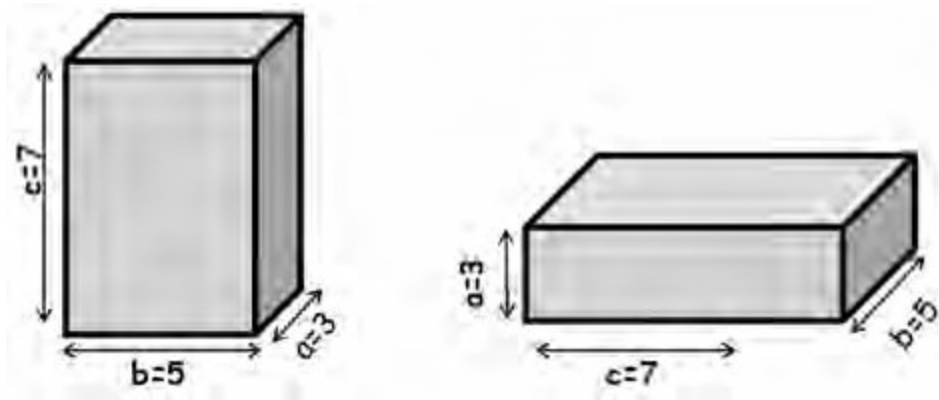
Es decir, que para saber los caramelos que tienen entre David, María y Raquel, da igual que sume primero los que tienen entre David y María para luego sumar los de Raquel, que sumar a los de David los que tienen entre María y Raquel.

El producto también cumple esta propiedad:

$$2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Que en este caso, gráficamente la podríamos asociar con el cálculo del volumen de un prisma rectangular en distintas posiciones: da igual cuál sea la posición, el volumen es el mismo.



Propiedad distributiva

Vamos a un quiosco de chuches y en el expositor donde están las cajas de las que te sirves pone un cartel: «Todas a 5 céntimos». Coges 2 regalices y 4 piruletas. Al llegar a la caja te dicen: 2 de estos y 4 de estos son 6, así que a 5 céntimos cada una, son 30 céntimos. Es decir han hecho la cuenta:

$$(2 \text{ regalices} + 4 \text{ piruletas}) \times 5 \text{ cent. la unidad} = 30 \text{ cent.}$$

Supongamos que para comprar las chuches lo hacemos de dos veces: en la primera vez solo coges los 2 regalices, vas a la caja y te cobran 10 céntimos. Ahora vuelves al expositor por segunda vez, coges las 4 piruletas, vas a caja y te cobran 20 céntimos. Es decir, que el total que te has gastado en los dos viajes al expositor ha sido de:

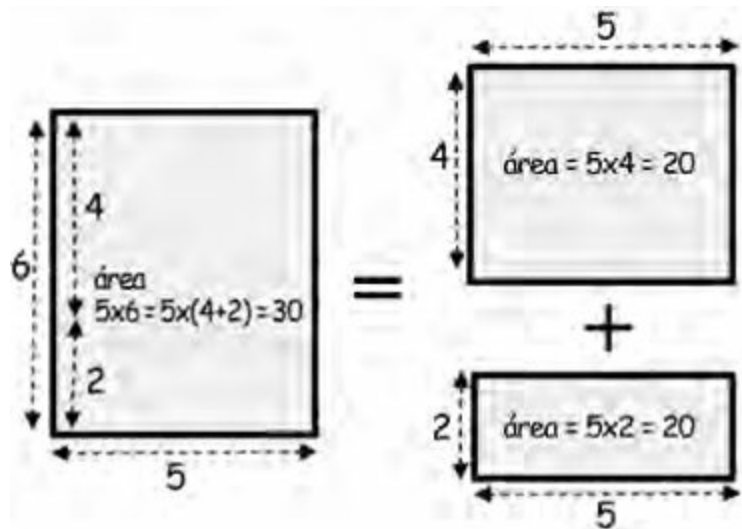
$$2 \text{ regalices} \times 5 \text{ cent.} + 4 \text{ piruletas} \times 5 \text{ cent.} = 30 \text{ cent.}$$

En conclusión, la misma cantidad que cuando solo echo un viaje, es decir:

$$5 \times (4 + 2) = 5 \times 4 + 5 \times 2 = 30$$

A esta propiedad se la llama propiedad distributiva y la podemos observar cuando compramos diferentes artículos a un mismo precio, como en el caso de un quiosco de gominolas o en rebajas cuando ponen un cartel de todo a 5 euros (pantalones, camisas...) o en un mostrador de una charcutería «fiambres a 7 euros» (chóped, mortadela...).

Cuando un niño sepa calcular áreas de rectángulos, sería interesante que esta propiedad la entendiese de forma gráfica.



Al dividir un rectángulo en otros dos, el área del primer rectángulo es igual a la suma de estos dos:

$$5 \times (4 + 2) = 5 \times 4 + 5 \times 2$$

1.6. Iniciación a la potenciación

Concepto

De la misma forma que multiplicar es sumar el mismo número varias veces, la potenciación es multiplicarlo. Es una multiplicación abreviada de varios factores iguales. Así de simple.

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$



¿Y qué pasa con las potencias de exponente cero? Eso para cuando el niño sea más mayor.

Dentro de la potenciación, para un estudiante de Primaria son especialmente interesantes las de exponente 2 y exponente 3, y más en concreto su interpretación geométrica:

- para el exponente 2 es el área de un cuadrado de lado la base de la potencia
- y para el exponente 3 es el volumen de un cubo de arista la base de la potencia.

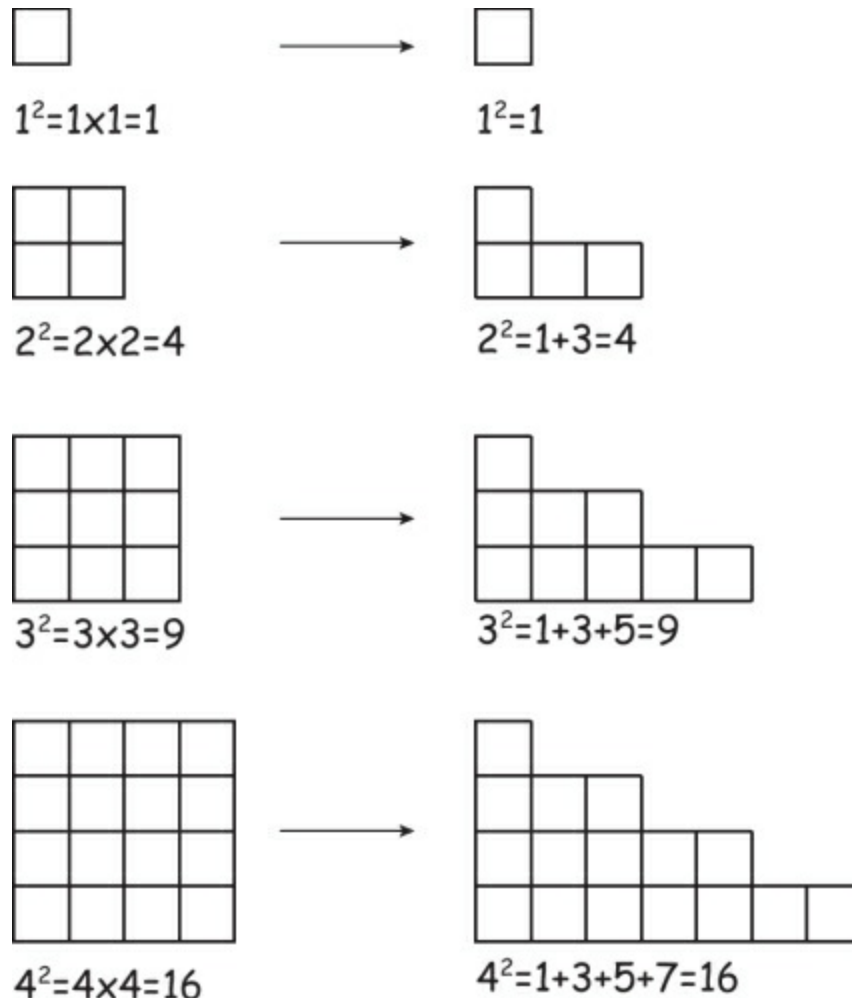
Un detalle más que interesante. Existe otra manera de calcular el cuadrado de un número natural que se la debemos a Pitágoras: en concreto, para calcularle, solo hay que sumar los primeros números impares que indica el valor del número del que calculamos su cuadrado. Por ejemplo:

- el cuadrado de 3 es la suma de los tres primeros números impares $3^2 = 1 + 3 + 5 = 9$
- y el cuadrado de 4 es la suma de los cuatro primeros números impares $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

Así pues, en general diríamos que $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ con «n» mayor o igual que 1 y natural.

Evidentemente es un resultado que se escapa de lo exigible a un niño, pero no de su comprensión (como veremos) y desde el punto de vista didáctico es muy interesante; es de esas cosas que ayudan a percibir lo que son las matemáticas. Para que un niño lo comprenda solo tiene que tener claro que el valor de las potencias con exponente 2 se corresponde con el área de un cuadrado de lado el valor de la base (de la potencia). Es como un puzle formado por tantas piezas de 1×1 como indica el valor de la potencia. Entonces, aunque en el puzle se muevan las piezas, el área sigue siendo la

misma, ¡esto es lo primero que se debe comprender! Observa el dibujo adjunto, se explica por sí mismo.



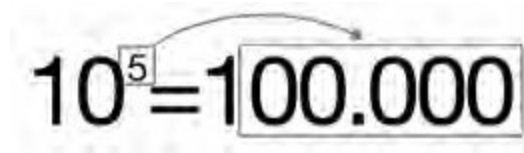
Así, por ejemplo, $3^2 = 9$ forma un cuadrado compuesto por 9 piezas de 1 x 1, pero que si muevo dos de ellas de la primera a la última fila da lugar a otra forma geométrica que tiene la misma área, pero con 1 pieza en la primera fila, 3 en la segunda y 5 en la tercera. En general se observa que siempre podemos transformar el puzle con forma cuadrada en otra forma que conserva la misma área, con el mismo número de filas y donde el número de piezas que hay en cada una sigue una pauta o regularidad: la que observó Pitágoras.

Con esta argumentación no solo conseguimos que un niño comprenda y observe el resultado que pretendíamos (aunque evidentemente no su demostración), sino también fomentar el razonamiento algebraico.

Potencias de base 10

Las potencias de base 10 son un caso particular de la potenciación, porque siempre la base es la misma: el número 10.

En las potencias de base 10, el número del exponente es el número de ceros que siguen al 1 en el resultado final.


$$10^5 = 100.000$$

Si relacionamos estas potencias con el sistema numérico decimal tenemos que:

$$10^1 = 10 \text{ la decena.}$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100 \text{ la centena.}$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1.000 \text{ la unidad de millar.}$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000 \text{ la decena de millar.}$$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100.000 \text{ la centena de millar.}$$

¿Y para qué sirven estas potencias? De momento para escribir de forma abreviada cantidades muy, muy grandes y muy, muy pequeñas. Por ejemplo, la distancia al planeta Urano es de 3.000.000.000 kilómetros (aproximadamente 3.000 millones de kilómetros), que si hacemos uso de las potencias de base 10 escribiríamos: 3×10^9 km. Por el contrario, a Alberto Contador le acusaron de dopaje por una cantidad de 0,000000000001 gramos de clenbuterol, es decir, $1/10^{12}$ gramos, vamos, más o menos como que vas a la tienda a pedir esta cantidad de jamón y lo que te dan es a oler el cuchillo.

De todas formas es difícil que un niño observe en la realidad que le rodea cantidades escritas en potencias de base 10, pero sí le puedes decir que cuando avance en el estudio de la física, la química o la biología va a hacer uso de ellas.

1.7. Raíz cuadrada

Es la última operación aritmética básica que tiene que aprender un niño con los números naturales. Sencillamente es justo el inverso o lo contrario a elevar un número al cuadrado.

- La raíz cuadrada de 16 es 4 porque 4 elevado al cuadrado es 16.

$$\sqrt{16} = 4 \text{ porque } 4^2 = 16$$

Es difícil hacer comprender a un niño la utilidad de la raíz cuadrada. Como ejemplo podemos tomar el caso en el que conozco lo que vale el área de un cuadrado, pero no sé lo que vale el lado. Si tengo un jardín de 36 metros cuadrados en forma de cuadrado y quiero vallarlo por completo para que no se escape el perro, sé que tendría que ir a la ferretería a comprar 24 metros de valla.

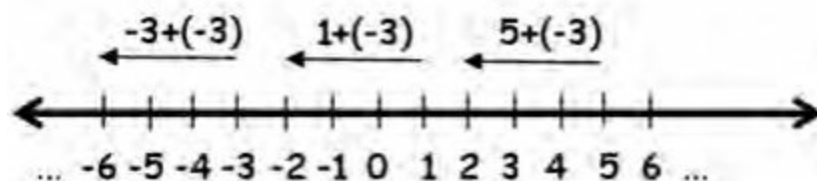
2. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

La principal dificultad viene por la suma y la resta de un número negativo, porque la idea de asociar la suma con juntar y la resta con quitar que teníamos con los números naturales se ve alterada.

2.1. Suma de un número negativo

Esta es una cuestión que en principio a un niño le puede parecer un poco liosa. Lo que hay que grabar en su cabeza es que siempre que sumemos a un número otro negativo nos movemos a la izquierda en la recta numérica, es decir, disminuye el valor del número al que lo sumas, siempre lo hace más pequeño.

$(-3) + (-3) = -6$	$(+1) + (-3) = -2$	$(+5) + (-3) = 2$
--------------------	--------------------	-------------------



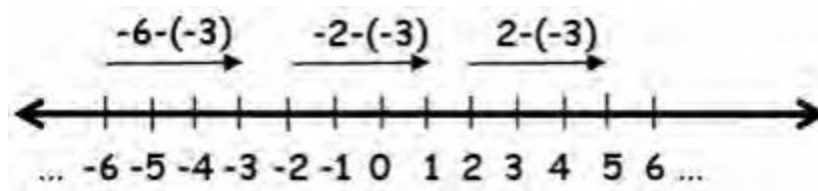
¿Cómo hacer entender esto de forma intuitiva? Supón que estás en la terraza de un bar y pides un botellín de agua. El camarero te la sirve, la pruebas

y notas que está un poco caliente para tu gusto. Deseas enfriarla, ¿qué haces? Sencillamente le pides al camarero que te añada (o sume) un hielo que tiene una temperatura negativa: el resultado es que la temperatura del agua baja.

2.2. Resta de un número negativo

Y también en la cabeza de un estudiante se tiene que grabar lo siguiente: cuando restamos a un número otro negativo nos movemos a la derecha en la recta numérica, es decir, aumenta el valor del número al que lo restas, lo hace más grande.

$(-6) - (-3) = -3$	$(-2) - (-3) = 1$	$(+2) - (-3) = 5$
--------------------	-------------------	-------------------



Restar una cantidad negativa es como sumar su valor absoluto (el valor del número sin el signo $-$).

¿Por qué esto es así? Volvamos a la terraza del bar, pero ahora resulta que cuando pido el agua, el camarero me le trae en un vaso con un hielo, pruebo y está muy fría. ¿Qué hago para subir la temperatura del agua? Simplemente quito (resto) el hielo. El resultado de quitar este elemento con temperatura negativa es que sube la del agua del vaso.

Un detalle: el niño puede confundir lo que es el signo del número con el símbolo del operador suma o resta.

3. OPERACIONES CON NÚMEROS FRACCIONARIOS

Nos vamos a centrar en comprender la suma y la resta.

3.1. Suma y resta de fracciones de igual

denominador

Si partimos una pizza en 5 porciones y tú te comes 3, te has comido $\frac{3}{5}$ de la pizza. Si yo me como una, me he comido $\frac{1}{5}$ de la pizza. ¿Y cuánto nos hemos comido entre los dos del total de la pizza? Sin hacer ninguna cuenta: 3 porciones tú y 1 porción yo, es decir, 4 en total, y como había 5, nos hemos comido 4 de 5, es decir, $\frac{4}{5}$. Evidentemente acabamos de sumar fracciones.

sumo numeradores

$$\begin{array}{r} 3 \quad 1 \quad 4 \\ - \quad + \quad - \\ 5 \quad 5 \quad 5 \end{array} =$$

mismo denominador

Para sumar fracciones con el mismo denominador, lo único que hay que hacer es sumar las cifras de los numeradores y dejar como denominador el que tenían. Así de simple y sencillo.



¿Y si ahora quisiéramos saber cuánta pizza te has comido más que yo? Tu comiste 3 y yo comí 1, es decir, de las 5 te has comido 2 porciones más, o lo que es lo mismo, son $\frac{2}{5}$ más. Bien, acabamos de restar fracciones.

Para restar fracciones con el mismo denominador, lo único que hay que hacer es restar las cifras de los numeradores y dejar como denominador el que tenían.

resto numeradores

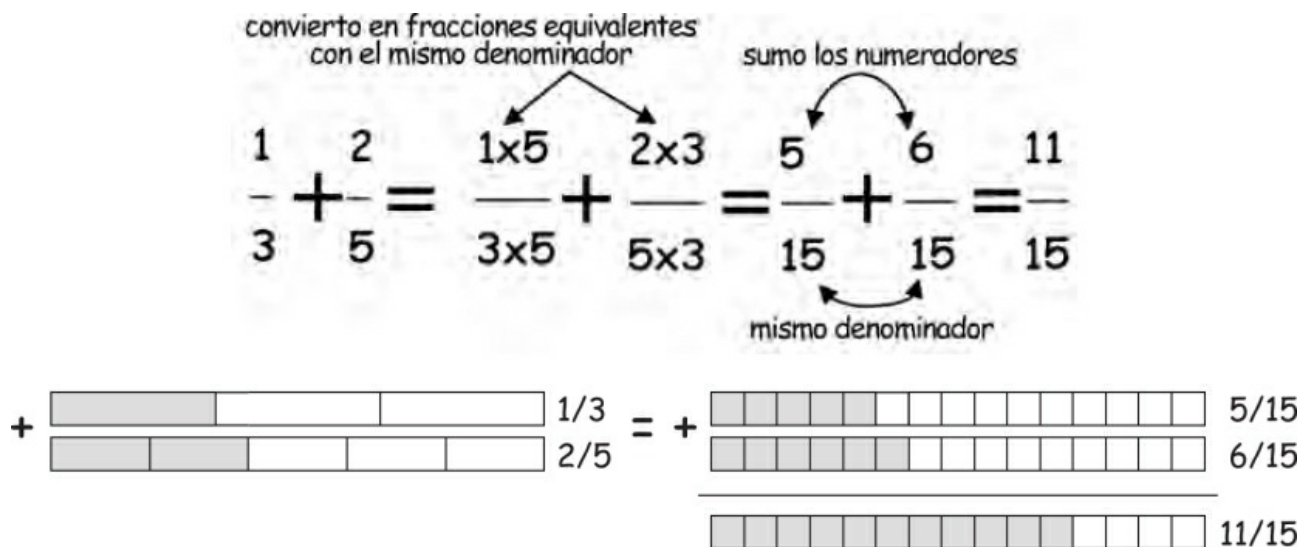
$$\begin{array}{r} 3 \quad 1 \quad 2 \\ - \quad - \quad = \\ 5 \quad 5 \quad 5 \end{array}$$

mismo denominador

En principio son razonamientos accesibles para un niño sobre todo si lo acompañamos del dibujo correspondiente.

3.2. Suma y resta de fracciones con distinto denominador

Evidentemente este es un problema más complejo y lo importante es que el niño comprenda que lo podemos transformar en otro más simple: si queremos sumar $1/3$ con $2/5$, lo ideal sería transformarlos de alguna manera en otros números fraccionarios que siguieran representando estas cantidades (que fuesen fracciones equivalentes), pero tuviesen el mismo denominador, es decir, un denominador común. Así de esta forma estaríamos en el caso anterior (mismo denominador) y solo tendríamos que sumar los numeradores. Una vez comprendido esto, el niño tiene que ser consciente de que tiene conocimientos para hacer esta transformación, porque ya lo hemos aplicado cuando vimos aquello de «fracciones equivalentes» y «comparamos fracciones» con distinto denominador: solo hay que multiplicar el denominador y el numerador de cada una por el denominador de la otra.



Pero te insisto, considero que lo importante es que se dé cuenta de cómo pasar de un problema complejo a uno más simple aplicando un concepto como es el de fracción equivalente.

Para la resta el procedimiento es similar.

Una vez que un niño sabe sumar fracciones es muy fácil entender cómo interpretar una fracción impropia, cuestión que estaba pendiente. Si cojo dos pizzas, las divido en 6 partes, de una me como los 6 trozos y de la otra 3, en total me he comido:

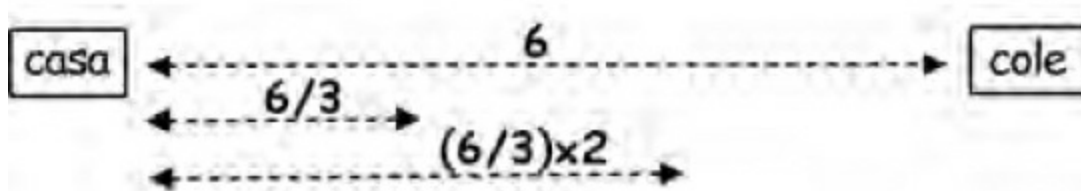
$$6/6 + 3/6 = 9/6$$

Donde 9/6, fracción impropia (numerador mayor que el denominador), se interpreta como haber comido una pizza (6/6) y media (3/6).

3.3. Fracción de un número

También un estudiante de Primaria tiene que calcular la fracción de un número, por ejemplo 2/3 de 6. Es muy fácil de entender haciendo uso de la idea de distancia. Si desde su casa hasta el colegio un niño tiene que recorrer 6 kilómetros y quiere averiguar cuántos kilómetros lleva recorridos cuando ha andado 2/3 del trayecto, solo hay que dividir el total (6 km) en 3 partes y ver cuánto valen 2 de ellas.

$$(6/3) \times 2 = 4 \text{ km}$$



4. RAZÓN, PROPORCIÓN Y PORCENTAJE

Supongamos que en una granja hay 12 vacas y 4 caballos. Entonces si queremos saber la relación que se da entre el número de vacas y el de caballos, podríamos escribir el siguiente cociente:

$$\frac{\text{número o de vacas}}{\text{número de caballos}}$$

En este caso sería $12/4$, que vale 3. ¿Y cómo lo interpretamos? Muy fácil, que «hay el triple de vacas que de caballos» o como que «por cada caballo hay tres vacas». Esto es lo que se llama una «razón» (o ratio), que no es más que un cociente entre dos números comparables, una relación que se da entre ellos, en este caso número de vacas y caballos.

Si en lugar de esto quisiéramos saber la relación entre el número de vacas y el total de animales de la granja (vacas más caballos), hubiésemos hecho el siguiente cociente:

$$\frac{\text{número o de vacas}}{\text{total de animales (vacas y caballos)}}$$

En este caso sería de $12/16$. ¿Y cómo lo interpreto? Sencillamente que 12 de 16 animales de la granja son vacas. Esto es lo que se llama una «proporción», que no es más que un cociente entre una cantidad (número de vacas) y un total al que pertenece (número de animales de la granja).

Si ahora calculamos el cociente que expresa la proporción ($12/16$), obtengo un valor de 0,75, que interpretaríamos como: por cada animal de la granja 0,75 es una vaca. Pero si a esta cantidad la multiplicamos por 100, tendríamos un valor de 75, y la interpretación es evidente: 75 animales de cada 100 (75%) que

hay en la granja son vacas. Esto es lo que se llama un «porcentaje», que simplemente refleja la relación que se da entre dos cantidades tomando como referencia el número 100.

Por poner otro ejemplo. En una clase se han contado los animales de compañía que tienen entre todos los alumnos. El resultado ha sido: 24 perros y 6 gatos.

Razón entre perros y gatos = número de perros/número de gatos = $24/6 = 4$, es decir, por cada gato hay 4 perros.

Proporción de perros = número de perros/total de animales de compañía = $24/30$, es decir, de 30 animales de compañía 24 son perros. Si hacemos la cuenta, $24/30$ nos da 0,8, es decir, que por cada animal de compañía 0,8 es perro.

Porcentaje de perros = proporción $\times 100 = 24/30 \times 100 = 80\%$, es decir, de cada 100 animales de compañía, 80 son perros.

Resumiendo:

- Razón es una relación entre dos magnitudes que se pueden medir: entre vacas y caballos o entre perros y gatos
 $A/B = C$, por cada unidad de B hay C de A.
- La proporción es una relación entre una parte y el todo: entre vacas y total animales de la granja o entre perros y total animales domésticos. Y como diría Euclides: al ser el todo mayor que las partes, nunca una proporción puede tener un valor mayor que 1 (en cambio una razón sí).
 $A/(A + B) = D$, del total de unidades (A + B) hay D de A o por cada unidad del total (A + B) hay D de A.
- El porcentaje no es más que una razón o una proporción multiplicada por 100, que es la base de su interpretación. Aunque también se pueden ver como fracciones decimales, con denominador igual a 100. Para expresar el porcentaje se utiliza el símbolo «%».
 $40/100 = 40\%$, se lee 40% y se interpreta como 40 de cada 100.

Razones y proporciones las irá encontrando y manejando un estudiante a medida que avance en el estudio de la geometría y la estadística. Los porcentajes también, pero estos se observan con más frecuencia en la vida diaria:

- 40% descuento en primeras marcas: 40 euros de cada 100 que cuesta el artículo me salen gratis; solo pago los otros 60.
- 8% de descuento en carburante en el siguiente repostaje: 8 de cada 100 euros que me cueste el siguiente repostaje no los pago.
- 30% de descuento en la segunda unidad: 30 de cada 100 euros que cuesta la segunda unidad no los pagamos.
- Todo al 50%: 50 de cada 100 euros no los pago, solo pago los otros 50.
- 10% de descuento para socios: si eres socio, 10 de cada 100 euros no los pagas.
- Un 20% de los encuestados opina que...: 20 de cada 100 encuestados opina que...
- El 70% de los niños tiene caries...: 70 de cada 100 niños tiene caries.
- La gasolina sube un 5%, quiere decir que la cantidad de gasolina que antes me daban por cada 100 euros ahora me la dan por 105.
- Las manzanas bajan un 8%, quiere decir que la cantidad de manzanas que antes me daban por cada 100 euros ahora me la dan por 92 (8 euros menos).
- Etiquetas que explican la composición de productos de alimentación: un 20% de hidratos de carbono, un 35% de proteínas, un 40% de lípidos...

Llevo unas cuantas páginas sin recordarte que acompañes la observación con fotos y fíjate que hay carteles, publicidad, envases, facturas, tiques de compra, cupones... donde aparecen.

También hay que saber calcular un porcentaje de una cantidad. Para ello se multiplica la cantidad por el número que señala el porcentaje y el resultado de este producto lo dividimos entre 100:

$$20\% \text{ de } 250 = (250 \times 20)/100 = 50$$

Da igual que primero divida la cantidad entre 100 y luego lo multiplique por el número que señala el porcentaje:

$$20\% \text{ de } 250 = (250/100) \times 20 = 50$$

La idea es la misma: el 20% de 250 es tomar 20 de las 100 partes en las que dividimos 250. Personalmente me parece más intuitiva esta segunda forma de cálculo.

$$\begin{array}{l}
 250 \quad \boxed{\text{-----}} \\
 250/100 \quad \boxed{\text{---}} \\
 (250/100) \times 20 \quad \boxed{\text{-----}}
 \end{array}$$

5. PROPORCIONALIDAD

Mira las siguientes filas de números que recogen los kilogramos de queso que se pueden fabricar con un determinado número de litros de leche:

Nº kg de queso	1	2	3	4
Nº litros de leche	5	10	15	20

Como puedes observar, para fabricar 1 kg de queso hacen falta 5 litros de leche; así, para fabricar 2 kg se necesita el doble (10 litros), para fabricar 3 kg el triple (15 litros), etc. Es decir, observamos que si calculamos la razón entre los kg de queso fabricados y la leche que se necesita, se mantiene en un valor constante de 5 litros/ kg, es decir, hay una «proporcionalidad».

Ahora observa la siguiente tabla:

Km recorridos en bici	30	55	75	90
Tiempo utilizado (horas)	1	2	3	4

Como puedes ver, en una hora recorre 30 kilómetros, pero en el doble de tiempo (dos horas) no recorre el doble de distancia (solo recorre 55 km), ni en el triple de tiempo el triple de distancia. En este caso la razón entre número de kilómetros recorridos en bici y el tiempo que utiliza para recorrerla no se mantiene en un valor constante: NO existe «proporcionalidad» entre kilómetros y tiempo aunque sí existe una correlación positiva (a más tiempo en bici, más kilómetros recorridos).

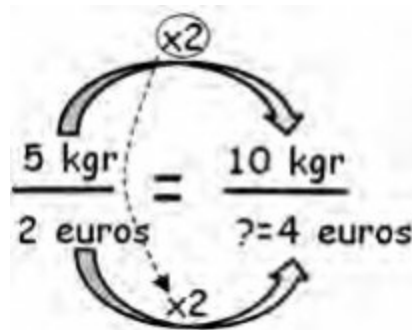
En general, para que haya proporcionalidad (y no solo correlación) se tiene que cumplir que al dividir los valores de una serie por los valores correspondientes de la otra, siempre debemos de obtener el mismo número, es decir, la razón entre las dos series se tiene que mantener constante. Con el ejemplo del queso:

$$5/1 = 10/2 = 15/3 = 20/4 = 5 \text{ litros/kg}$$

Esta idea de proporcionalidad tiene muchas aplicaciones en matemáticas, por ejemplo en geometría, pero la aplicación más inmediata es la famosa «regla de tres». Sinceramente no sé si la «regla de tres», nombrada como tal, ha beneficiado o perjudicado al aprendizaje de las matemáticas. Mi experiencia en la enseñanza es la que me ha llevado a plantearme esta duda: ¿por qué hay personas que quieren ver reglas de tres por todos lados? En nombre de «la regla de tres» se pueden hacer en matemáticas tantas barbaridades como a lo largo de la historia se han hecho en nombre de Dios.

La regla de tres que tiene que conocer un estudiante de Primaria es la simple, y dentro de la simple, la directa. Por decirlo con otras palabras, el caso más básico (como es lógico).

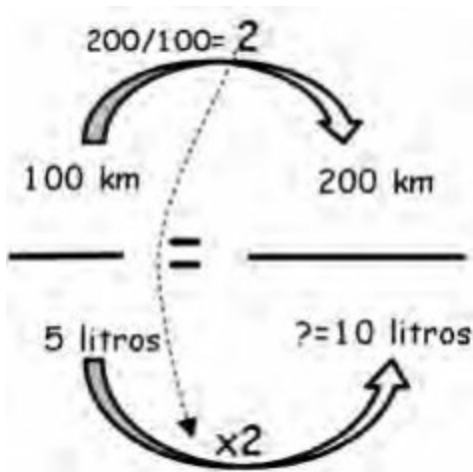
Por ejemplo, vamos a la tienda de la esquina a comprar 5 kilos de patatas y nos cuestan 2 euros, entonces si compramos el doble de cantidad, 10 kilos, la regla de tres te dice que el tendero nos cobrará el doble de dinero: 4 euros (suponiendo que el precio por kilo es siempre el mismo). Y punto. No es más que una aplicación de la idea de proporcionalidad.



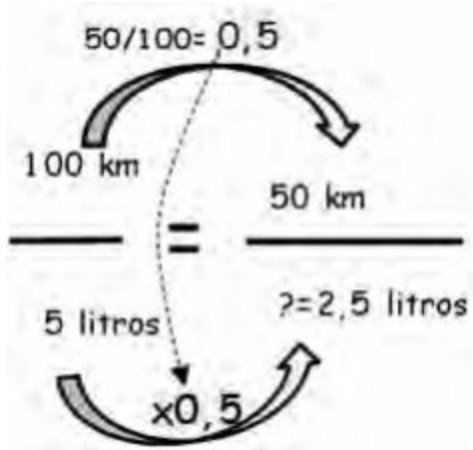
Pongamos otros ejemplos. Tu coche consume 5 litros de gasolina si recorres 100 kilómetros, ¿cuántos consumirá si recorres 200 kilómetros? Haciendo la siguiente tabla se ve muy fácil:

Kilómetros recorridos	100	200
Litros consumidos	5	?

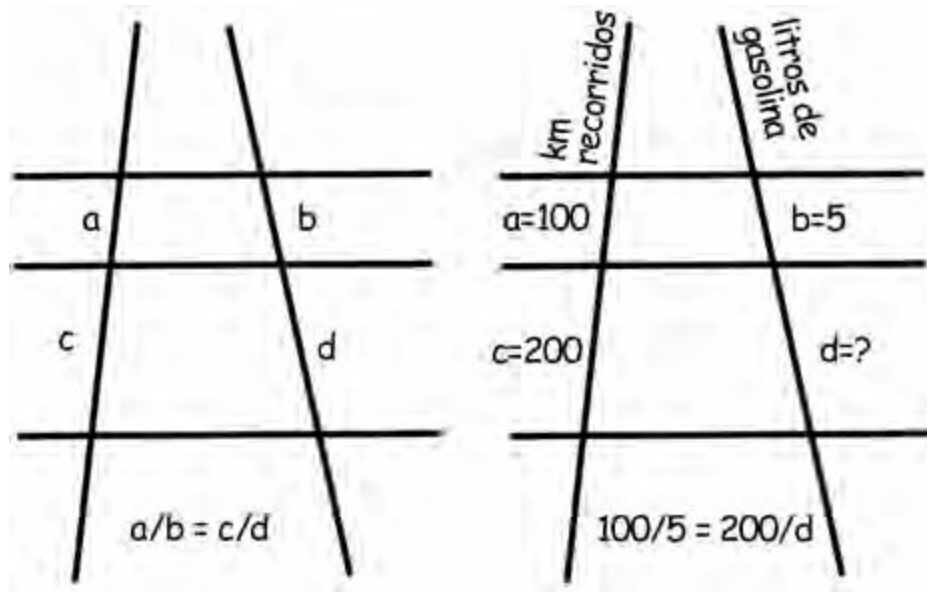
Si se mantiene la proporcionalidad entre kilómetros recorridos y litros consumidos, en la misma proporción que varíen los kilómetros tiene que variar el consumo. Como los kilómetros se multiplican por 2, el consumo también: $5 \times 2 = 10$, que son los litros consumidos en 200 km.



Un detalle: si en este problema la pregunta hubiese sido «¿cuánto consumirá si recorremos 50 km?», entonces como hemos pasado de 100 km a 50 km la variación es de $50/100 = 0,5$ (la mitad), y en esta proporción tiene que variar el consumo, luego si multiplico 5 litros $\times 0,5$, obtengo el valor que busco: 2,5 litros (en 50 km).



En conclusión, hacer una regla de tres simple directa es muy fácil. La mejor interpretación gráfica que se puede dar de la regla de tres simple directa es a través de la representación en el plano cartesiano de la ecuación de una recta que pasa por el origen, sobre todo porque se aprecia que para solucionar un problema haciendo uso de ella, admitimos relación lineal entre las variables y dentro de las de este tipo las que pasan por el origen, pero para un niño de Primaria esto está muy por encima de lo exigible. También se podría utilizar el teorema de Tales para tener una gráfica soporte de la regla de tres: si enunciamos este teorema como «si dos rectas cualesquiera, se cortan por varias rectas paralelas, entonces los segmentos determinados en una recta son proporcionales a los correspondientes de la otra», ya tenemos todos los elementos necesarios para definir el concepto de proporcionalidad que hemos visto.



Esta representación puede ser de mucha utilidad a la hora de plantear un problema.

Por otro lado, es importante que un niño recuerde que «la regla de tres» no se puede aplicar a todo, fundamentalmente por un motivo: que admitimos que existe proporcionalidad cuando la aplicamos, y esto no es siempre así. Por ejemplo, si compro una lata de sardinas puede costar 1 euro, pero 3 latas a lo mejor no cuestan 3 euros porque el marketing se ha encargado de ello: puede que haya una oferta de 3×2 . Por ponerte otro ejemplo: si a un cachorro de perro le das 10 kg de pienso al mes y ha crecido 15 centímetros, no quiere decir que si le damos el doble, 20 kg crecerá también el doble, 30 centímetros (por esta regla de tres podríamos convertir un caniche en un mastín).

Te pongo más ejemplos de «regla de tres»:

- Si 2 latas de sardinas cuestan 3 euros, ¿cuánto cuestan 4 latas? Como es el doble de latas, costarán el doble de dinero: 6 euros.
- Si 10 botellas de aceite cuestan 30 euros, ¿cuánto nos costarían 5 botellas? Como 5 es la mitad de 10, nos costarían la mitad de 30 euros, es decir, 15 euros.
- Si 3 botellas de leche nos cuestan 2 euros, ¿cuánto nos cuestan 9 botellas?
- Como 9 es el triple de 3, nos costará el triple de dinero, es decir, 6 euros.
- Todos los días para comer 4 personas ponemos en la mesa 8 platos y 4 vasos. Si invitamos a comer a otras 4 personas, ¿cuántos platos y vasos ponemos? Como hay el doble de personas a la mesa: 16 platos y 8 vasos.

Como puedes ver, la compra en el supermercado es un buen sitio para observar «reglas de tres», pero recuerda: ¡ojo con el marketing!

3

GEOMETRÍA

1. QUÉ ES Y PARA QUÉ SIRVE

El matemático francés Poincaré definió la geometría como «el arte de pensar bien, y dibujar mal» o también traducido como «un arte de razonamientos bien hechos sobre figuras mal hechas».

Es una definición fabulosa por dos motivos: uno, su sencillez; otro, que a muchos de nosotros nos garantiza estar capacitados para la geometría. Personalmente dibujo mal.

Podemos entender la geometría como el estudio del espacio, entendiendo por espacio el lugar donde se encuentran los elementos de la geometría: puntos, rectas, planos, triángulos, pirámides... De esta forma, el estudio sobre cómo se construyen, qué propiedades tienen, cuál es su área, su volumen, como están posicionados en el espacio, cómo se mueven (traslaciones, giros, simetrías), cómo están distribuidos, qué distancia le separa, etc. forma parte de la geometría, en el sentido en que la tiene que entender un estudiante de Primaria.

Toda la geometría que tiene que aprender pertenece a lo que se llama «geometría euclídea», en reconocimiento a las aportaciones de Euclides, matemático griego que en torno al año 300 antes de Cristo escribió el tratado de geometría Los Elementos, el libro más famoso de la materia.

¿Y qué tiene que aprender el estudiante de Primaria de esta geometría?

Muy sencillo, partiendo de la idea de punto, recta y plano, se centrará en el estudio de las figuras geométricas que se pueden construir en el espacio, bien sean planas (como el triángulo o el rectángulo) o no (como el cubo o la pirámide). Estudiará sus características, algunas propiedades y relaciones entre ellas, como calcular su área, algún volumen... En definitiva, una introducción a elementos básicos de la geometría. Pero no se trata que un niño aprenda a dibujar perfectos triángulos y sepa de memoria la fórmula de su área, sino que sea capaz de observarla y deducirla en la medida de lo posible: pretendemos que «piense bien, aunque dibuje mal».

Y por cierto, ¿para qué sirve la geometría?

Para casi todo, nuestra vida cotidiana está llena de ella:

- El diseño de cualquier objeto que fabrique el hombre necesita geometría (coche utilitario o de Fórmula 1, avión, plancha, envase de botella o de una caja de galletas, un teléfono, una silla, una moto, un tornillo, un juguete, un vaso, un balón, un caldero, una rueda, un bastón de montaña, una puerta, una ventana, un reloj...).
- En la construcción de una casa, un colegio, un aeropuerto, una gasolinera, una carretera, un puente, un polideportivo, una pista de tenis o de atletismo, un campo de golf... también es necesaria la geometría.
- Cuando utilizamos un mapa o un GPS para posicionarnos, hacemos uso de la geometría.
- También cuando calculamos la distancia entre planetas, de una ciudad a otra, la altura de una montaña o medimos la superficie de un país, de una huerta o calculamos el volumen de una bola de billar o la capacidad de un congelador, de una barrica de vino o del agua que puede contener un pantano.
- Cuando distribuimos los muebles en una habitación, las plantas en un jardín o las mesas en una terraza de bar, estamos haciendo geometría.

2. ELEMENTOS BÁSICOS

Vamos a considerar que el espacio tiene como mucho tres dimensiones: la longitud, la anchura y la altura. Valga como ejemplo para un niño que una caja

de zapatos tiene las tres dimensiones, una hoja de papel solo dos (la longitud y la anchura) y un hilo de coser solo una (la longitud).

Los elementos básicos de la geometría euclídea son el punto, la recta y el plano. A partir de ellos se desarrolla y construye la geometría. Lo curioso es que NO tienen definición. Los podemos explicar a través de ejemplos y descripciones, pero no definirlos.

2.1. El punto

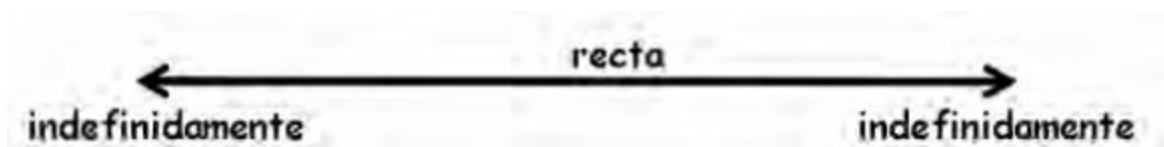
Un punto señala una posición en el espacio, no tiene dimensiones (ni longitud, ni anchura, ni altura) y, por tanto, no podemos calcular su superficie ni su volumen. La marca de un bolígrafo, un lapicero o un agujero de un alfiler en una hoja de papel es aproximadamente la idea de punto (en el espacio hay infinitos puntos).

De todas formas, la idea de «punto» como una posición en el espacio la entenderá mejor un niño cuando estudie el sistema de coordenadas cartesianas.

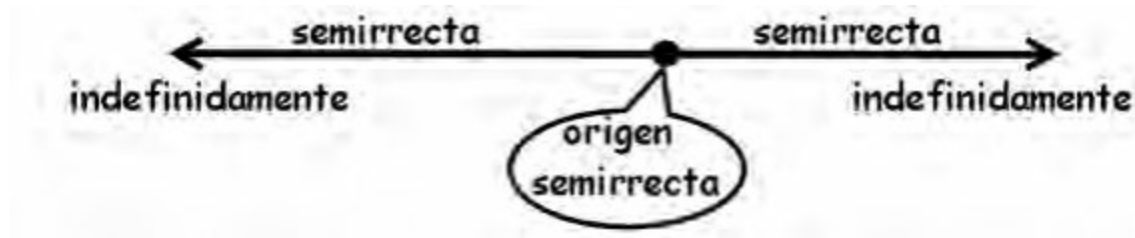
2.2. La recta

Una línea recta se puede entender como una sucesión infinita de puntos alineados en una misma dirección. Solo tienen una dimensión: la longitud. Mirando un hilo o una cuerda tensa, podemos observar la idea de lo que es una recta.

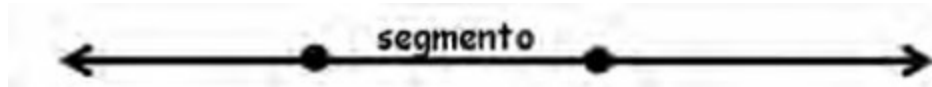
Una recta no tiene principio ni fin, se prolonga de forma indefinida en las dos direcciones.



Cuando marcamos un punto en una recta, esta queda dividida en dos semirrectas (tienen principio pero no tienen fin).

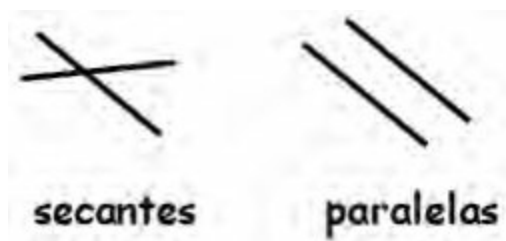


Si marcamos dos puntos en una recta, la parte que queda comprendida entre esos puntos en un segmento de recta (tiene principio y fin).



La idea de recta como algo que no tiene principio ni fin no es fácil de entender para un niño, de hecho es probable que entienda como recta lo que hemos llamado «segmento de recta». No pasa nada (de momento).

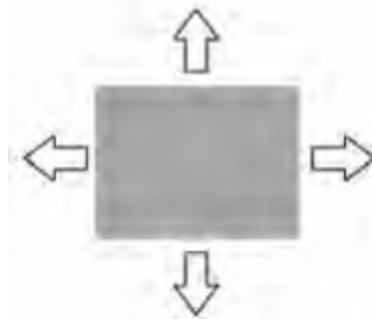
Si dos rectas se cortan en un punto (o tienen un punto en común) se dice que son secantes y si no lo hacen (no tienen ningún punto en común) se dice que son paralelas.



2.3. El plano

La idea de plano nos la da una superficie lisa que se extiende indefinidamente en todas las direcciones.

Tiene solo dos dimensiones (longitud y anchura) y contiene infinitos puntos y rectas. Una hoja de papel con un tamaño infinito nos permite aproximarnos a la idea plano.

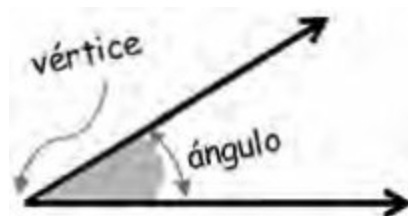


Al igual que con la recta, para un niño la idea de un plano que se extiende de forma indefinida, no es fácil de comprender, posiblemente solo se quede con la idea de superficie lisa, pero limitada (o finita), tal y como te aparece en el dibujo adjunto, es decir, percibe el plano tal y como ve una hoja de papel o la pizarra.



Y una vez que tenemos los elementos básicos, ¿qué hacemos? Poincaré nos diría que pensar. Y a esto tenemos que incitar al niño.

2.4. Ángulos



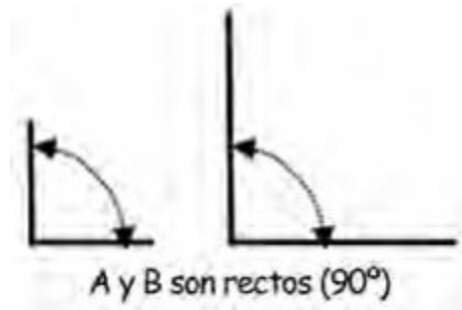
Si dibujamos dos semirrectas que tienen el mismo origen, determinan en el plano una región. Esta región la llamamos ángulo y al origen común, vértice.

Un niño tiene que ser consciente de que nos encanta medir todo aquello que podamos. La necesidad o curiosidad por cuantificar es una especie de virus que tiene el ser humano, entonces, ¿por qué no medir la amplitud de esta región, es decir, la abertura del ángulo? Claro que lo hacemos y para ello

usamos grados. El punto de referencia es el ángulo recto, que tiene 90 grados.

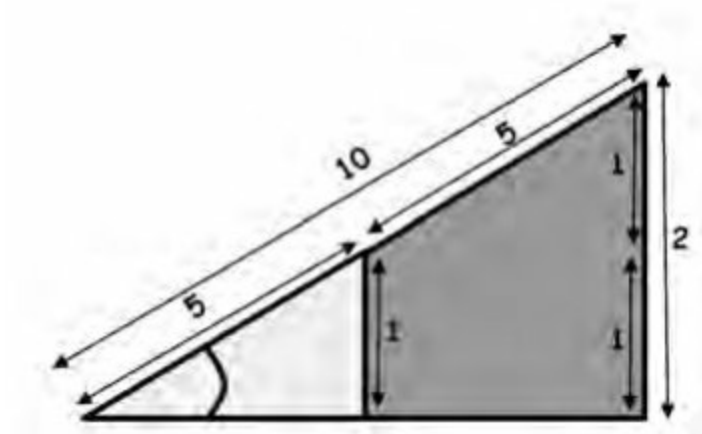


Posiblemente a un niño le cueste entender que la medida del ángulo no varía aunque lo haga la longitud de sus lados.

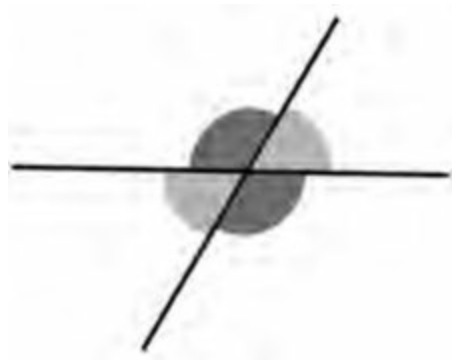


Es decir, que entre las dos situaciones que ves en el dibujo, considere que el ángulo B es mayor que el A. El niño tiene que tener claro que estamos midiendo la amplitud del ángulo no la longitud de sus lados.

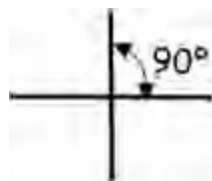
Para aclarar esta idea se puede usar un razonamiento como el que sigue. Supongamos una rampa que tiene una longitud de 5 metros con un desnivel de 1 metro. Bien, ahora supongamos una rampa más grande, en concreto con una longitud de 10 y una altura de 2. Evidentemente la rampa es más grande, pero igual que en la rampa «pe-queña» para subir 1 metro de desnivel recorre 5 metros. Esto es así porque el ángulo de las rampas es el mismo (y, por tanto, la razón entre longitud y altura de la rampa $5/1 = 10/2$).



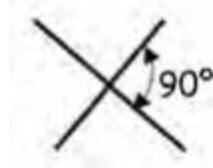
Otro análisis interesante para un niño es el asociado al cruce de 2 rectas en un punto (secantes). Siempre quedan determinados 4 ángulos, que son iguales dos a dos y que entre los cuatro suman 360° (ángulo completo o suma de dos llanos).



En el caso de que los cuatro ángulos sean de 90° , las rectas son perpendiculares.



Y, por cierto, la idea de perpendicularidad NO ES la de una recta vertical y otra horizontal que se cruzan, sino la de rectas que al cortarse forman ángulos de 90° (recto). Es otro detalle a tener en cuenta.



También es interesante el análisis de lo que ocurre con los ángulos que se forman cuando a dos rectas paralelas las cruzamos con una secante.



En este dibujo se observa claramente la idea de ángulos adyacentes (consecutivos y suplementarios a la vez, suma 180°), así como la igualdad 2 a 2 que se produce entre los ángulos.

Si en los bloques de números y operaciones te recomendaba hacer fotos, ¡imagínate ahora, donde todo lo que nos rodea y ven nuestro ojos tiene forma! Por ponerte algunos ejemplos:

- La idea de punto pueden ser las estrellas del firmamento, o la marca posicional de la pantalla de un GPS.
- Líneas paralelas las observamos en los tendidos eléctricos o en las marcas viales que delimitan las carreteras.
- Líneas perpendiculares se pueden ver con tan solo mirar el enlosado de un suelo o el azulejado de una pared.
- Una alfombra en el suelo o una sábana secándose en el tendedero puede reflejar la idea de plano para un niño.
- Ángulos rectos, agudos y obtusos aparecen en el cuadro de una bicicleta.

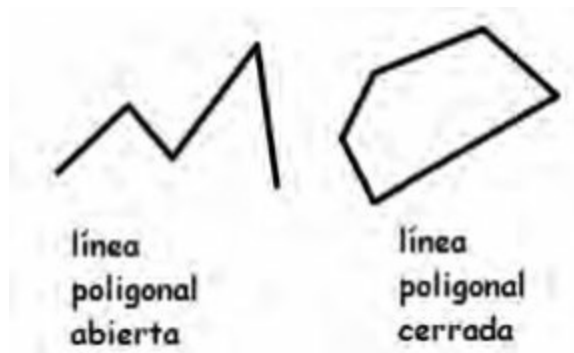
Y los ejemplos son interminables, es cuestión de observar y echarle un poco de imaginación.

3. LA GEOMETRÍA EN DOS DIMENSIONES: LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

El siguiente paso que damos en el mundo de la geometría, es el estudio de las figuras geométricas, es decir, de la parte del plano que queda delimitada por líneas rectas o curvas. Las que estudian en Primaria son los polígonos y el círculo. Empecemos con los primeros.

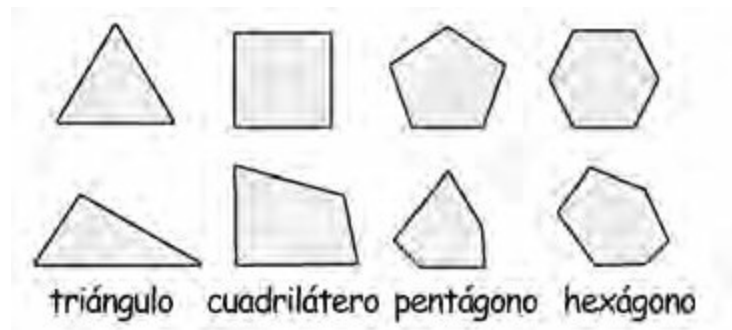
3.1. Los polígonos

Para definir un polígono a un niño se le suele explicar primero lo que es una línea poligonal: una línea poligonal es una línea quebrada formada por segmentos de recta; los segmentos se conocen como lados y los puntos comunes de los lados, como vértices (igual que en los ángulos). Puede ser abierta o cerrada.



El polígono sencillamente es la parte del plano que queda delimitada por una línea poligonal cerrada, es decir, con todos los lados unidos entre sí. Para evitar la palabra plano en el colegio lo suelen definir como una línea poligonal cerrada y su interior. Pero tiene que quedar claro que un polígono está definido teniendo en cuenta los elementos base de la geometría: el punto, la recta y el plano. Esto se ve claramente cuando dibujamos y posicionamos un polígono en el sistema de coordenadas cartesianas.

A partir de esta idea, y dependiendo de los lados que formen el polígono, hablamos de triángulos, cuadriláteros, rombos, pentágonos...



Es interesante que un niño observe una cosa: 3 es el número mínimo de lados que puede tener un polígono, con menos de tres no puede ser una línea poligonal cerrada, es decir, no pueden quedar unidos todos los lados, por lo que un triángulo es el polígono más simple que se puede construir. De hecho, cualquier polígono se puede descomponer en triángulos con tan solo trazar diagonales de unos vértices a otros.

Nos vamos a centrar en el estudio de triángulos y cuadriláteros.

3.1.1. Los triángulos

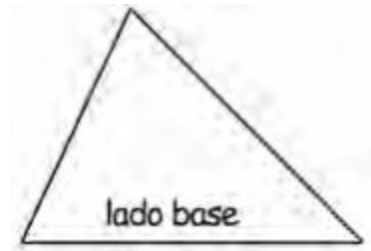
Al acabar Primaria, para un niño no tendría que ser un problema clasificar un triángulo bien sea por la longitud de sus lados (equilátero, isósceles o escaleno), bien por la medida de sus ángulos (rectángulo, acutángulo, obtusángulo, llano).

Lo que sí es más difícil de comprender es que siempre la suma de los ángulos de un triángulo es de 180° (da igual del tipo que sea), pero la demostración gráfica de este resultado es accesible para un niño que está finalizando Primaria. Como se ve en el dibujo, los tres ángulos suman uno llano.



Altura y base de un triángulo

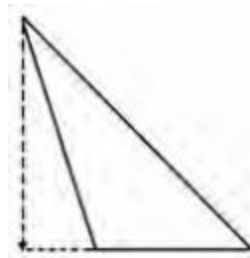
Un niño percibe como base de un triángulo el lado en el que parece estar apoyado. Entonces lo primero que tiene que entender es que podemos apoyar el triángulo en cualquiera de los tres lados y, por tanto, cualquier lado puede ser la base. Para que lo vea claro dibuja un triángulo en una cartulina, recórtalo, pincha con un alfiler aproximadamente en el centro, y hazlo girar para que vea cómo puede cambiar la base.



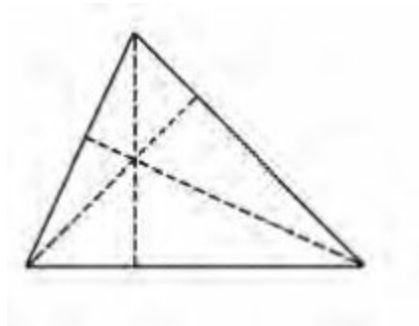
La altura de un triángulo es la línea perpendicular trazada desde la base al vértice opuesto.



Como un triángulo tiene tres posibles bases y tres vértices, podemos trazar tres alturas.



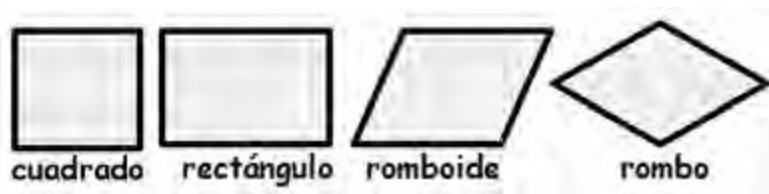
Una dificultad adicional respecto del concepto de altura, viene dada porque en algunos casos para trazarla hay que prolongar la base.



3.1.2. Los cuadriláteros

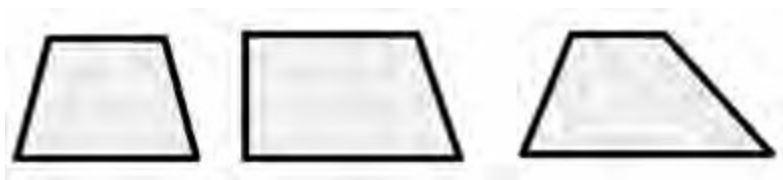
Los polígonos de cuatro lados quedan clasificados según el paralelismo de sus lados:

Paralelogramos (lados paralelos dos a dos)



Un niño tiene que observar que en cuadrados y rectángulos todos sus ángulos son rectos, mientras que en romboides y rombos se combinan agudos con obtusos.

Trapecios (dos lados paralelos)

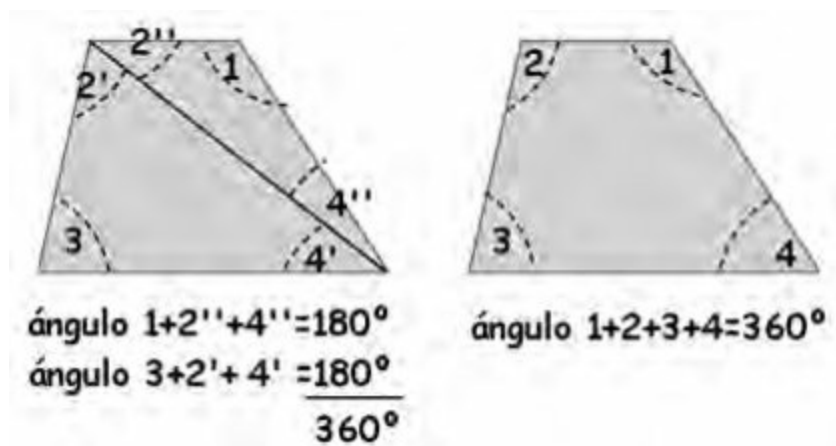


Trapezoides (ningún lado paralelo)

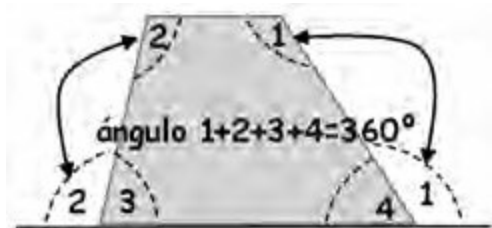


Siempre la suma de los ángulos de un cuadrilátero es de 360° y se puede hacer comprender a un niño este resultado sabiendo dos cosas:

1. Que cualquier cuadrilátero se puede descomponer en 2 triángulos (se ve claro con tan solo unir dos vértices opuestos).
2. Que la suma de los ángulos de estos es de 180° ($180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$).



Otra forma de verlo es teniendo en cuenta que el ángulo 2 y 3 suman 180° , de la misma forma que el 1 y el 4.



Te insisto: son razonamientos que un niño puede comprender y que, además, le obligan a pensar y observar.

Para mejorar la visión espacial sobre las figuras geométricas puede ser una buena actividad dibujarlas en una cartulina, recortarlas, pincharlas con un alfiler en el baricentro y hacerlas girar para observarlas en distintas posiciones.

3.2. La circunferencia y el círculo

Un niño tiene que distinguir entre lo que es una circunferencia y un círculo.



Circunferencia: es una línea curva cerrada con todos sus puntos a igual distancia de un punto de referencia que llamamos centro.

Círculo: es una figura geométrica formada por la circunferencia y su interior. Repetimos: ¡y su interior!

Los elementos más importantes que podemos distinguir son:

- Radio es un segmento que une el centro de la circunferencia con uno de sus puntos.
- Diámetro es un segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.

$$(\text{diámetro} = 2 \times \text{radio})$$

3.3. Cómo observar figuras geométricas

Un buen ejercicio consiste en observar las distintas figuras geométricas en los objetos que nos rodean. Esta es una actividad que en el colegio se suele realizar. Intentar encontrarlas en objetos de la naturaleza tal como las dibujamos nosotros en un papel es un poco complicado. Por ejemplo: la silueta de algunas montañas tiende a tener forma triangular, al igual que las orejas de un gato; la cara de un bebé puede tender a ser circular, al igual que el contorno de un girasol; la celda de un panal de abejas tiende a ser hexagonal; una naranja tiende a ser esférica al igual que un canto rodado de río... En cambio, en los objetos que diseña y construye el hombre, es más fácil encontrar las figuras geométricas de forma exacta: una puerta tiene forma de rectángulo, al igual que una mesa de pimpón o la pantalla de un televisor; una pelota de tenis o un balón de baloncesto son esferas...

A continuación te pongo ejemplos de objetos (naturales o artificiales) en los que podemos encontrar las principales figuras y cuerpos geométricos que hemos estudiado.

¿Dónde observar triángulos?

Los nachos de maíz, los triángulos de emergencia que llevamos en el maletero del coche, señales de tráfico (que indican peligro), una porción de pizza, un pincho de tortilla, logotipos de alguna marcas...

¿Dónde observar cuadrados/rectángulos?

Puerta de un frigorífico (o de un armario, de una casa...), la trasera de un garaje, una ventana, la pantalla de un ordenador o de una videoconsola portable, tablero de un aro de baloncesto, el terreno de juego de un campo de fútbol o de una cancha de tenis, una piscina, marco de un cuadro, tarjeta de crédito, el DNI, la pizarra de clase, la carta de una baraja, teclas del ordenador...

¿Dónde observar otras figuras planas (trapeacios y trapezoides)?

Los campos de cultivo vistos desde un alto (una pequeña montaña, la parte alta de un valle o un castillo). De todas formas sin salir, desde un ordenador los puedes ver a través de Google Earth, Google Maps o Sigpac (este es un visor con fotografías aéreas del campo español, similar a los de Google, pero que incluye la posibilidad de ver remarcada la figura plana de las parcelas).

¿Dónde observar circunferencias y círculos?

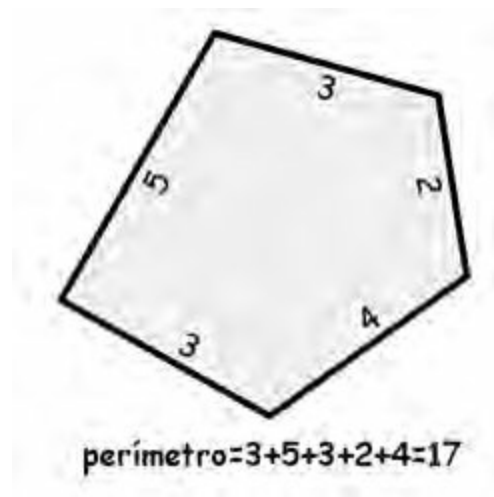
Cualquier rueda (de un coche, de una bici, de un camión, autobús, de unos patines...), quesos enteros, pan, fiambres cortadas (chóped, mortadela...), tapaderas de cubos y sartenes, platos, pizzas y tortillas de patata enteras, monedas... y recuerda: ¡todo lo que se puede observar, se puede fotografiar!

4. ÁREA Y PERÍMETRO DE UNA FIGURA

4.1. Perímetro

El perímetro de una figura es la suma de la longitud de todos sus lados y, en principio, su cálculo para polígonos no debiera entrañar ninguna dificultad. Valga como detalle a observar que en los polígonos regulares, con todos los lados iguales, se puede calcular como el producto del número de lados por la

longitud de uno de ellos.



Pero en el círculo su perímetro es la longitud de la circunferencia y, ¿cómo la medimos? Pues a través del número pi « π », ese número tan especial en matemáticas, que expresa la razón entre la longitud de una circunferencia y su radio.

Longitud de la circunferencia = $2 \times \text{radio} \times \pi = \text{diámetro} \times \pi$



Este resultado es una auténtica maravilla de las matemáticas. Evidentemente es difícil que un niño se maraville con ello, pero al menos que se sorprenda: puede dibujar con el compás un círculo tan grande o tan pequeño como quiera, que siempre, ¡SIEMPRE!, la longitud de su circunferencia será «pi» veces su diámetro. Esto es una regularidad y esto son matemáticas, así de sencillo.

Como ya sabes, el número «pi» es un número muy especial, que un estudiante tiene que añadir a la lista de números especiales junto con el 0 y el 1. El siguiente sitio donde aparece es en el cálculo de áreas y volúmenes. A modo de curiosidad, la longitud de un gran río siguiendo su curso es

aproximadamente «pi» veces su longitud en línea recta (desde el nacimiento hasta su desembocadura).

En cuanto al valor del número «pi» hay que tener en cuenta que tiene infinitos decimales (que no tienen periodicidad):

$$\pi = 3,141592653\dots$$

Y respecto al cálculo del número «pi», un detalle importante. Quizá pudiéramos estar tentados a coger una lata de refresco y un metro de los de sastre, medir la longitud de su contorno (circunferencia) y su diámetro, coger la calculadora para hacer el cociente entra ambas cantidades y esperar que en la pantalla apareciese 3,141592653..., es decir, el número «pi». Pues no perdamos el tiempo que no va a dar este valor. Esto es una forma «experimental» de calcular el número «pi», pero no su verdadero valor, porque aunque «pi» es el resultado de dividir la longitud de una circunferencia entre su diámetro, la forma de obtener su verdadero valor no es esta. ¿Y cuál es? Pues en principio ninguno que esté al alcance de los conocimientos matemáticos que tienen que adquirir los niños de Primaria. De hecho, su cálculo ha sido un reto para los matemáticos a lo largo de la historia.

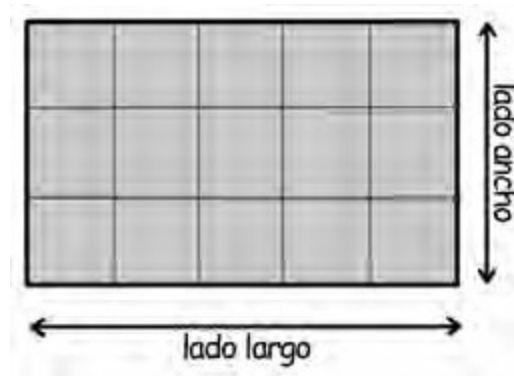
4.2. Área

El área de una figura es la medida de la superficie que queda delimitada por los lados. La superficie tiene dos dimensiones: largo y ancho.

Para que un estudiante de Primaria entienda cómo calcular áreas, podemos acudir a las técnicas de albañilería. Supongamos que queremos embaldosar una habitación, de la cual no sabemos su superficie. Viene el albañil a casa, hace la obra y nos dice que ha utilizado 20 baldosas. ¿Cuál es la superficie de la habitación? Sencillamente 20 baldosas. Así de fácil. No necesito ninguna fórmula para calcularla y me da igual cuál sea la forma de la habitación: triangular, rectangular, cuadrada, trapezoidal o como quiera que sea.

Es más, si solo existiese un tamaño de baldosa, conocido por todo el mundo, podríamos poner un anuncio en el periódico de que vendo piso de 120 baldosas y así, las personas que leyese el anuncio tendrían una idea exacta de cuánto mide el piso, de su área. En consecuencia vamos a poner un tamaño de baldosa estándar de 1 de largo por 1 de ancho, es decir una baldosa cuadrada de 1 de lado.

Profundicemos un poco más en el tema. Observamos que nuestro sistema de baldosas para medir superficies se utiliza muy fácilmente cuando lo que pretendemos medir son figuras rectangulares (con todos sus ángulos de 90°, rectos); es más, en este caso vemos que podemos obtener una sencilla fórmula para el cálculo del área.

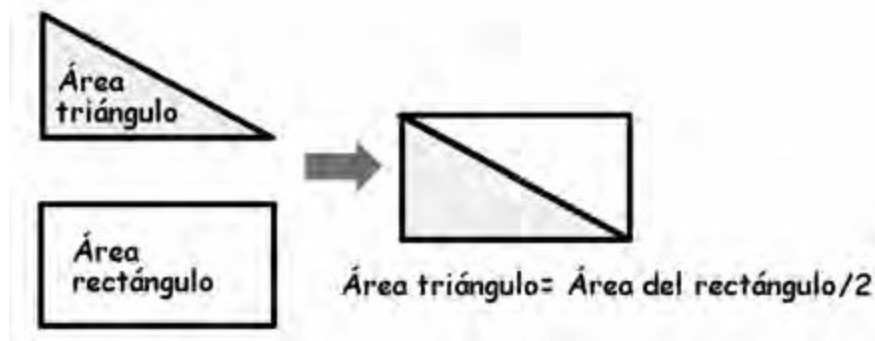


En vez de contar todas las baldosas una por una, contamos las que entran formando una fila (el largo) y las sumo tantas veces como filas de baldosas entren o haya en la superficie que quiero medir (ancho). ¿Pero que es sumar varias veces un mismo número? Pues multiplicar, luego si multiplico las baldosas que entran a lo largo por las que entran a lo ancho, me dice las baldosas que necesito para pavimentar el suelo, es decir, su área:

$$\text{Área superficie rectangular} = \text{largo} \times \text{ancho}$$

Con esta fórmula ya ni tan siquiera tenemos que embaldosar física o realmente el suelo para saber su superficie, con tan solo saber las baldosas que entran a lo largo y a lo ancho, problema resuelto. Si somos albañiles podemos dar presupuestos antes de hacer la obra. Es más, no necesitamos llevar la baldosa para medir las que entran: nos vale con llevar una cuerda con marcas distanciadas a la longitud de uno de sus lados (es decir, acabamos de inventar la cinta métrica).

Supongamos que nuestro vecino nos ha pedido que le midamos su jardín, y resulta que no es rectangular: tiene forma triangular, en concreto de triángulo rectángulo. ¿Cómo medimos su área? Nos va a tocar pensar, pero lo justo, porque observamos que si dibujo un rectángulo en el que quede inscrito el triángulo, este ocupa la mitad del área del rectángulo. Miramos el dibujo de abajo y lo vemos claro.



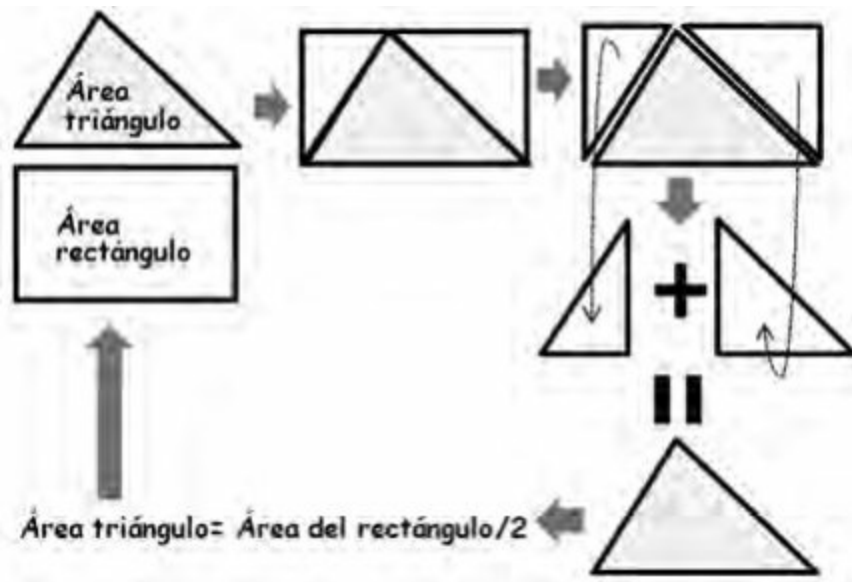
$$\text{Área del triángulo} = (\text{largo} \times \text{ancho}) / 2$$

En los triángulos, el largo o tomamos como base y el ancho como altura. Entonces la fórmula es:

$$\text{Área del triángulo} = (\text{base} \times \text{altura}) / 2$$

Nuestro vecino queda contento con nuestra medición y nos pide que midamos el jardín de su primo, que también es triangular. Al llegar a su jardín vemos que es un triángulo no rectángulo. ¿Valdrá nuestra fórmula para este caso?

Es cuestión de pensar un poco más, porque si inscribo el triángulo dentro de un rectángulo es fácil ver que el área del rectángulo sigue siendo el doble que la del triángulo que queda inscrito en él y, por tanto, la fórmula sigue siendo la misma.

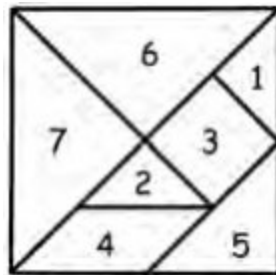


Ahora nos preguntamos si somos capaces de medir otras formas muy

variadas, como: romboides, rombos, trapecios y trapezoides con los conocimientos que tenemos. La respuesta es afirmativa por una sencilla razón: cualquier polígono se puede descomponer en triángulos, por lo que calculando sus áreas y luego sumándolas, obtenemos el área de la figura original. Este es un resultado de mucho valor didáctico para un niño.

Para coger soltura y habilidad en la composición/descomposición de figuras en triángulos y otras figuras, una herramienta muy útil es «el tangram» (recomendable al cien por cien).

El tangram es un antiguo juego de origen chino, muy conocido. Consiste en un puzle formado por 7 figuras geométricas: 5 triángulos de diferentes tamaños, un cuadrado y un paralelogramo. Todas ellas se pueden encajar formando un cuadrado, que es lo que se puede considerar el puzle base.



El juego consiste en formar con todas las piezas figuras que representan animales, flores, edificios, objetos... Para que te hagas una idea, hay publicadas miles de figuras compuestas con las 7 piezas. Es un juego didáctico recomendado para niños de 7 a 99 años. El tangram que aparece en el dibujo es el clásico y original, pero hay otros similares que en su despiece incluyen figuras de lados curvos, y permiten componer otros tipos de formas. Te insisto en lo altamente recomendable que son este tipo de puzles, por su elevado valor didáctico.

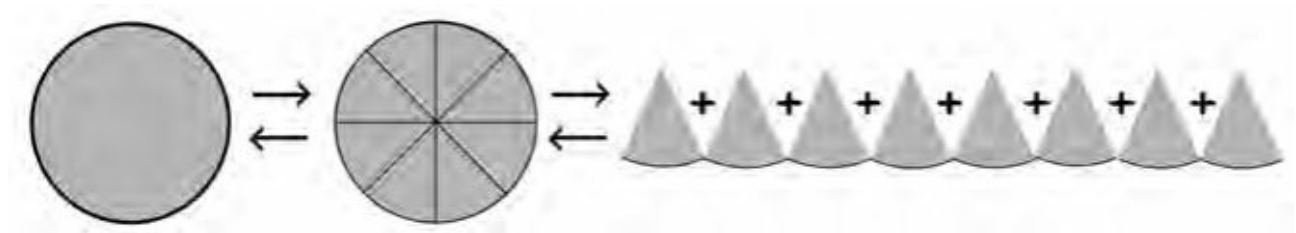
Bien, una vez dicho esto, más o menos somos capaces de medir cualquier superficie que sea un polígono. Pero, ¿cómo medimos el área de un círculo? Esto se nos escapa un poco de nuestras manos y acudimos a un experto en geometría, en concreto a Arquímedes (el del principio que lleva su nombre), y nos da la solución. El área del círculo se calcula como:

$$\text{Área del círculo} = \pi \times r^2$$

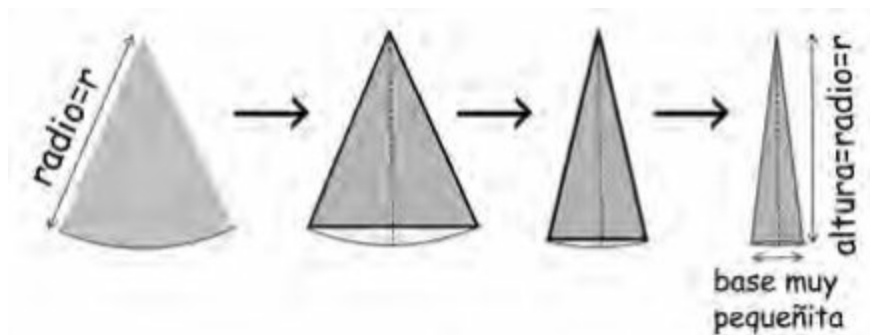
Es decir, el radio al cuadrado por el número π (aproximadamente 3,1416).

Vamos a intentar dar una explicación de esta fórmula, comprensible para

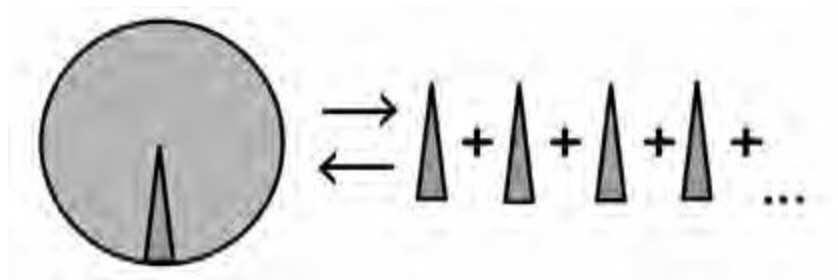
un niño. Empecemos la explicación. Si dividimos el círculo en piezas (sectores circulares) tal y como se suele partir una pizza o un tortilla de patatas, estamos construyendo un puzle, donde evidentemente la suma del área de todas las piezas (área del puzle) es el mismo que el del círculo, de la misma forma que cuando me como todas las porciones de una pizza me he comido la pizza entera.



Analicemos ahora la forma de una pieza.



Observamos que cuanto más pequeño es el arco de la pieza, su forma se aproxima más al del triángulo inscrito. De hecho, si tomamos arcos lo suficientemente pequeños, la diferencia entre la pieza del puzle y la del triángulo inscrito llegaría a ser nula. Por tanto, si partimos el círculo en muchísimas piezas, el problema inicial se transforma en otro de sumar áreas de triángulos que tienen por altura el radio y una base muy pequeñita.



Área del círculo = suma del área de las muchísimas piezas

Un poco de álgebra y solucionado. Como todas las piezas tienen de altura el radio, la suma de sus áreas es:

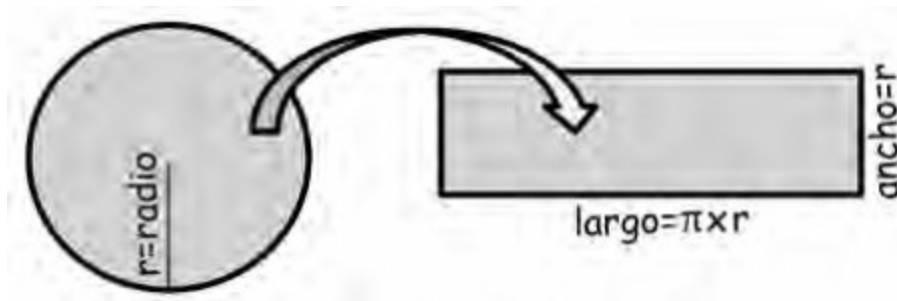
$$\text{Área del círculo} = (\text{suma de las bases de todas las piezas} \times \text{radio})/2$$

Donde la suma de todas las bases es la longitud de la circunferencia, $2 \times \text{radio} \times \pi$, ya que son el resultado de partir toda esta longitud.

$$\text{Área del círculo} = (2 \times \text{radio} \times \pi \times \text{radio})/2, \text{ que simplificando:}$$

$$\text{Área del círculo} = \pi \times \text{radio}^2$$

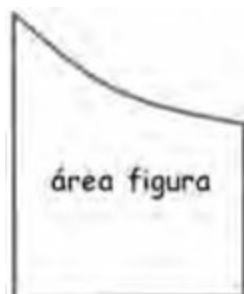
En esta fórmula también se observa que el área del círculo se corresponde con el de un rectángulo de lado corto el radio y de lado largo $\pi \times \text{radio}$.



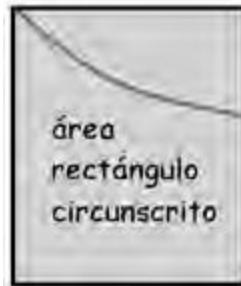
Insistimos al niño en que este rectángulo va a tener la misma área que el círculo (esto a veces para un niño no es fácil de comprender, por ejemplo si ponemos 1 litro de agua en una botella muy alta y luego vertemos ese litro en una más baja pero más ancha, tiende a decir que hay más agua en la alta).

Un último detalle para acabar con el cálculo de áreas.

Supongamos que tenemos una figura plana como la del dibujo adjunto y queremos calcular su área con los conocimientos que tenemos hasta ahora. Bien, como observamos, tenemos un lado que es una línea curva. ¿Qué hacemos?



Si circunscribimos la figura con un rectángulo, observamos que su área es menor que la del rectángulo que la circunscribe.



Si ahora inscribimos un rectángulo dentro de la figura, observamos que su área es mayor que la del rectángulo inscrito.



En conclusión, el área de la figura está acotada por los valores de las áreas de estos dos rectángulos. No damos una medida exacta de su área, sencillamente decimos entre qué valores está.



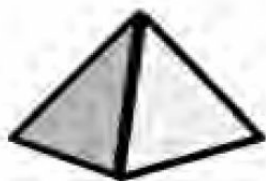
5. LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

5.1. Qué son y cómo se clasifican

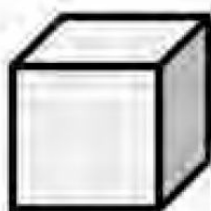
Son los que ocupan volumen en el espacio, los que tienen las tres dimensiones: largo, ancho y alto.

Las distintas formas de los cuerpos geométricos las podemos clasificar (igual que hicimos con las figuras geométricas planas). Así, vamos a tener dos grupos de formas:

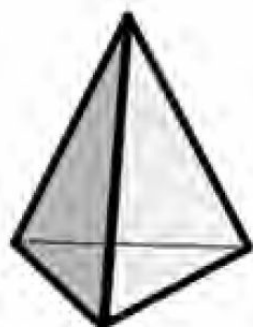
- Poliedros (o cuerpos planos): los que están delimitados por figuras geométricas planas.
Poliedros regulares: cubo, tetraedro.
Poliedros irregulares: pirámides y prismas.
- Cuerpos geométricos redondos: son los que tienen al menos una de sus caras con forma curva (cilindro, cono y esfera).



tetraedro



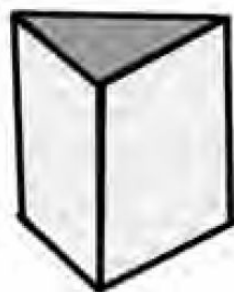
cubo



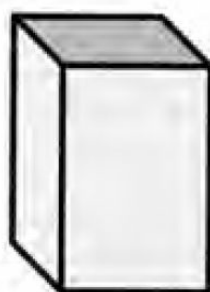
pirámide
triangular



pirámide
cuadrangular



prisma
triangular



prisma
cuadrangular



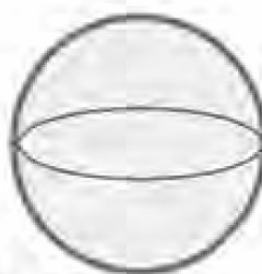
prisma
rectangular



cilindro



cono



esfera

5.2. Cómo observar cuerpos geométricos

Para observar en la vida cotidiana aplicaciones concretas de los cuerpos geométricos, no hay nada como los envases y monumentos.

En cuanto a los envases, un paseo por una gran superficie es toda una lección, por ponerte algunos ejemplos:

- Prismas (en su mayoría rectangulares): cualquier envase tipo break (leche, zumo, sopa...), una caja de bizcochos, la caja donde viene metida una impresora o una plancha, o el detergente para la lavadora, el envase del café molido...
- Cilindro: un bote de aceitunas, una lata de cerveza o de refresco, un paquete de galletas, o de pastillas de detergente, un tarro de tomate o de espárragos, un pack de DVD's para grabar, una lata de atún...
- Esfera y cono: envases esféricos y en forma de cono no hay muchos, para encontrarlos tendrías que ir a la sección de juguetes (por ejemplo, las bolas sorpresa)... Aunque para observar una esfera, solo hay que acercarse a la sección de deportes: en menos de quince segundos ya estamos diciendo ¡que dejes el balón!, que ¡con la pelota no se juega! Y para observar el cono es cuestión de esperar a que tu hijo te diga: cómprame un helado.

En lo referente a los monumentos, considero que los castillos son un ejemplo muy bueno para un niño, pues combinan la geometría con el interés que despiertan. En su construcción se pueden observar torres en forma de prisma cuadrado, rectangular o pentagonal, también con forma de cilindro (que pueden estar rematadas en cono), almenas rematadas con formas piramidales... Además muchos castillos tienen un «plus» para aprender geometría derivado de su ubicación: al estar en altos se distinguen los polígonos que conforman las amplias zonas de cultivos que se divisan desde ellos (sobre todo en ciertas épocas del año). Evidentemente, a lo mejor no tienes un castillo cerca de donde vives, pero posiblemente tengas Internet y puedas ver fotos y vídeos de mucho de ellos.

A parte de observar los cuerpos geométricos en envases y monumentos, puede ser interesante construir al menos los más simples: cubo, prisma

rectangular, prisma triangular, pirámide triangular y cuadrangular, cilindro y cono. Es muy sencillo, solo hay que bajarse de Internet (o comprar en una librería) el desarrollo plano del cuerpo geométrico o... dibujarlo en una cartulina. A continuación: a recortar y a pegar. Durante el proceso, un estudiante va observando de cada figura sus características: cuántas caras tiene, cómo son sus bases, ángulos... y lo que es muy interesante, cómo partiendo de una figura geométrica (un dibujo en dos dimensiones), pasamos a crear un cuerpo geométrico (que ocupa un espacio de tres dimensiones).

También es interesante que un niño aprenda a observar cómo se combinan cuerpos geométricos para formar otros objetos. Por poner un par de ejemplos:

- La torre de los campanarios de algunas iglesias son prismas cuadrados y el tejado que las cierra son pirámides.
- Los bidones de agua que se llevan en la bici, tienen una parte cilíndrica y otra (hasta el tapón) con forma de media esfera.
- Un helado de cucurucho es una combinación de una esfera con un cono.

Y como siempre, recuerda: lo que puedes ver lo puedes fotografiar.

Un niño tiene que tener claro que cuando tenemos longitud y anchura podemos calcular áreas y cuando tenemos longitud, anchura y altura también podemos calcular volúmenes. Por tanto, en los cuerpos geométricos podemos calcular ambas.

6. ÁREA Y VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

6.1. Cómo calcular el área de los cuerpo geométricos: poliedros y cilindros

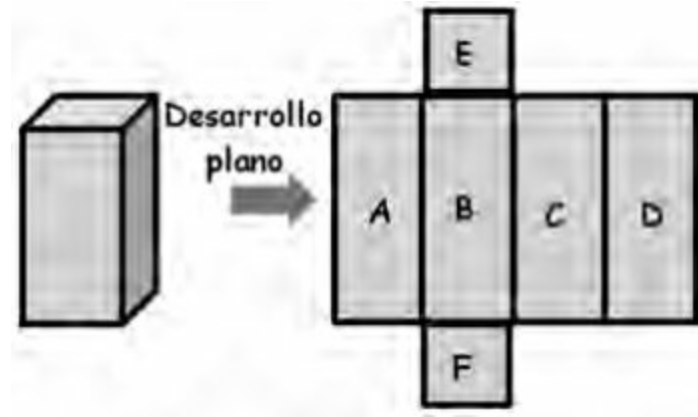
Para calcular el área de estos cuerpos geométricos solo hay que hacer una cosa: calcular el área de cada una de sus caras (que son figuras planas) y sumarlas todas, nada más.

$$\text{Área cuerpo geométrico} = \text{suma de las áreas de sus caras}$$

En los cuerpos geométricos que se estudian en Primaria esto lo puede

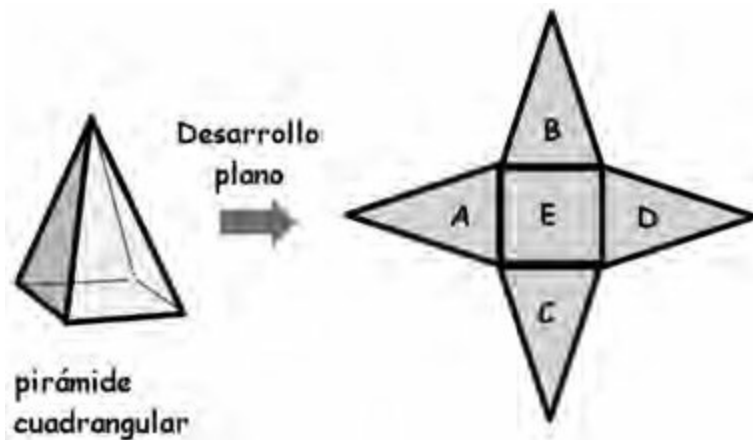
hacer con los que admiten un «desarrollo plano» (como poliedros y cilindros), pero con la esfera no. Valga como ejemplo un prisma cuadrangular:

$$\text{Área del prisma} = \text{Área } (A + B + C + D + E + F)$$



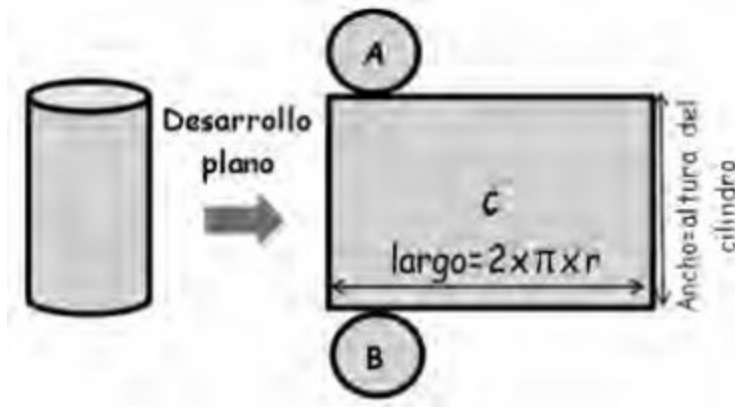
Si tenemos una pirámide cuadrangular y observamos su desarrollo plano, vemos que son cuatro triángulos iguales (A, B, C y D) y un cuadrado (E), luego su área es la suma de los de todos ellos:

$$\text{Área de la pirámide} = \text{Área } (A + B + C + D + E)$$



Para terminar con las áreas, veamos el caso de un cilindro. Observando su desarrollo plano, vemos que está formado por 2 círculos iguales (las bases, A y B) y un rectángulo (C). Las dimensiones del rectángulo son: de ancho la altura del cilindro y de largo la longitud de la circunferencia que forma la base:

$$\text{Área del cilindro} = \text{Área } (A + B + C)$$

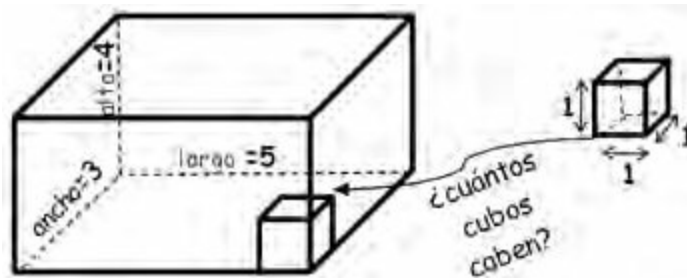


6.2. Volumen de cuerpos geométricos

En las figuras geométricas planas, al tener solo dos dimensiones (largo y ancho), únicamente podíamos calcular su superficie o área, pero ahora en los cuerpos geométricos, al tener las tres dimensiones (largo, ancho y alto), también podemos calcular el volumen que ocupan, es decir, la cantidad del espacio que es ocupada por el cuerpo geométrico.

La idea es la misma que para el cálculo de las superficies. Aquí definíamos una baldosa de 1 de largo por 1 de ancho y... a contar las baldosas que necesitamos para cubrir (enlosar) la superficie que queríamos medir. Ahora lo que vamos a hacer es definir un cubo de 1 de largo, 1 de ancho y 1 de alto (1 x 1 x 1) y ver cuántos cubos de estos entran en nuestro cuerpo geométrico.

Vamos a hacer este cálculo para el volumen de un prisma rectangular, que tiene 5 de largo, 3 de ancho y 4 de alto.



Como la base del cubo tiene 1 de largo y 1 de ancho, si multiplicamos el largo por el ancho del prisma estamos calculando todos los cubos que necesito para cubrir el área de su base, que en este caso son $5 \times 3 = 15$ cubos.

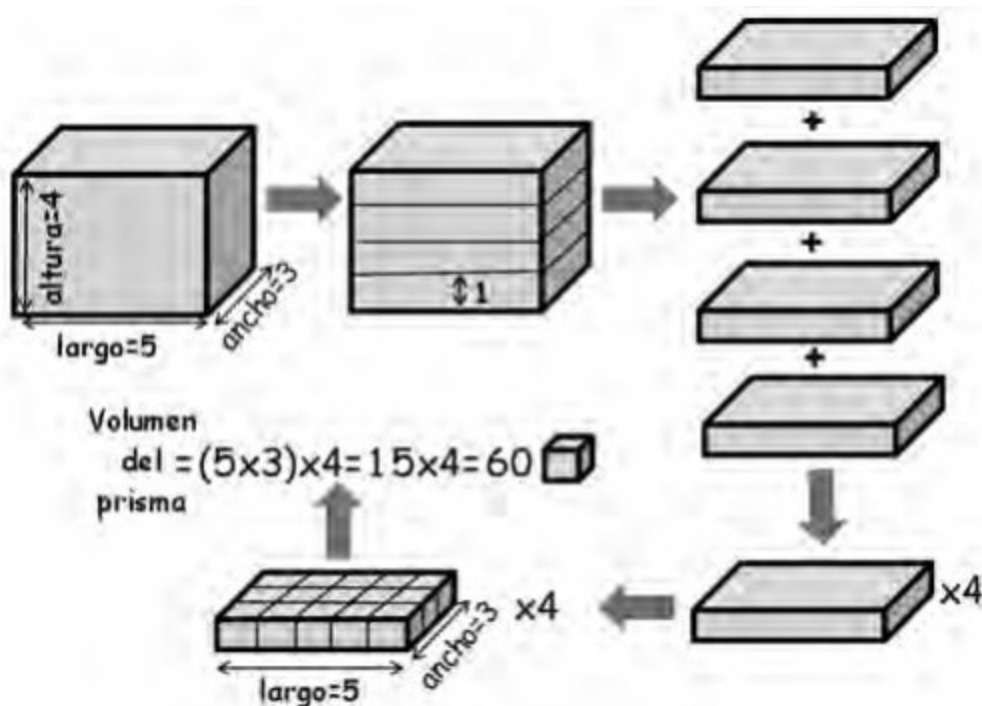
Si ahora tengo en cuenta que la altura del prisma es de 4, como los cubos

tienen una altura de 1, necesitaré $15 + 15 + 15 + 15$ cubos, es decir $15 \times 4 = 60$ cubos de $1 \times 1 \times 1$, para poder llenar todo el espacio que ocupa el poliedro.

En resumidas cuentas, el volumen del poliedro es igual al producto del área de la base por la altura.

Te propongo otra explicación. Mira el dibujo siguiente:

1. Dividimos el prisma en tantas partes «iguales» como nos dice su altura, en este caso son 4 (cada una de las partes tiene una altura de 1).
2. Evidentemente el volumen del prisma es la suma de los volúmenes de estas 4 partes, que como son iguales, es multiplicar el volumen de una cualquiera por 4. ¿Y cómo calculamos este volumen? Muy fácil, es el número de cubos de $1 \times 1 \times 1$ que entran en el área de su base. Como es un rectángulo, esta área es el producto largo por ancho, es decir, $5 \times 3 = 15$.
3. En conclusión, el volumen total del prisma rectangular es: $15 \times 4 = 60$ cubos de $1 \times 1 \times 1$.

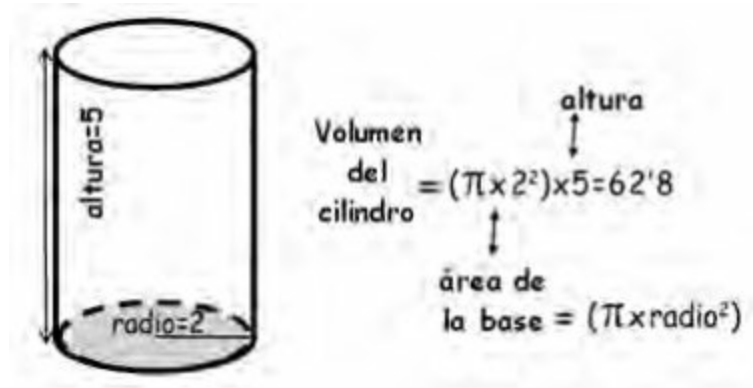


Como ves, se trata de «pensar bien aunque dibujemos mal».

Con el resto de prismas, el cubo y el cilindro, la idea es la misma: calcular el área de la base y multiplicarlo por la altura. En general, la fórmula es:

Volumen de prismas, cubo y cilindro = Área de la base x la altura.

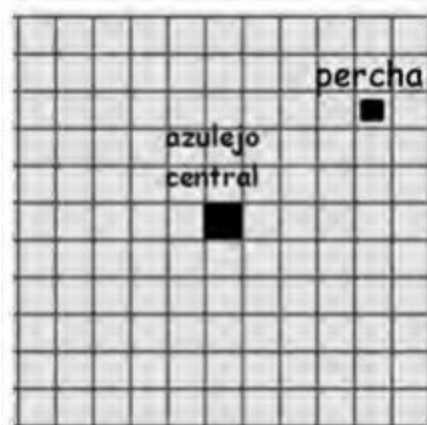
Pongamos un ejemplo con un cilindro. Calculamos el volumen del cilindro de altura 5 y radio 2:



7. PLANO Y COORDENADAS CARTESIANAS

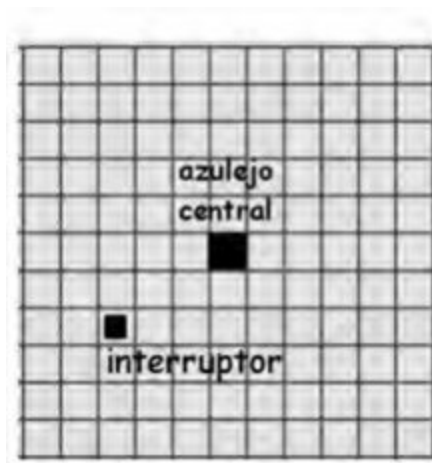
Supongamos que tenemos enfrente una pared azulejada y en ella hay una percha. Si queremos decir cuál es la posición de la percha en la pared (de la manera más exacta posible), a bote pronto diríamos que en la parte alta de la pared y hacia la derecha. Bien. Evidentemente nos damos cuenta de que contando azulejos podemos especificar la posición de forma más precisa.

De esta manera, tomando de referencia el azulejo del centro, la percha se encuentra contando 4 azulejos a la derecha (en horizontal) y luego 3 hacia arriba (en vertical). Entonces lo primero que tiene que observar un niño del sistema que hemos utilizado para posicionar la percha en la pared son dos detalles:



1. Que hemos utilizado dos valores para indicar la posición: uno que me indica cómo está posicionado a lo largo de la horizontal (el 4) y otro cómo lo está a lo largo de la vertical (el 3). Al conjunto de estos dos valores que indican la posición le vamos a llamar «coordenadas» (horizontal hacia derecha = 4, vertical hacia arriba = 3).
2. Que hemos tomado un punto de referencia para contar (el azulejo central). A este punto le vamos a llamar «origen» y tendrá como coordenadas: horizontal = 0, vertical = 0, puesto que es a partir de él cuando se empieza a contar

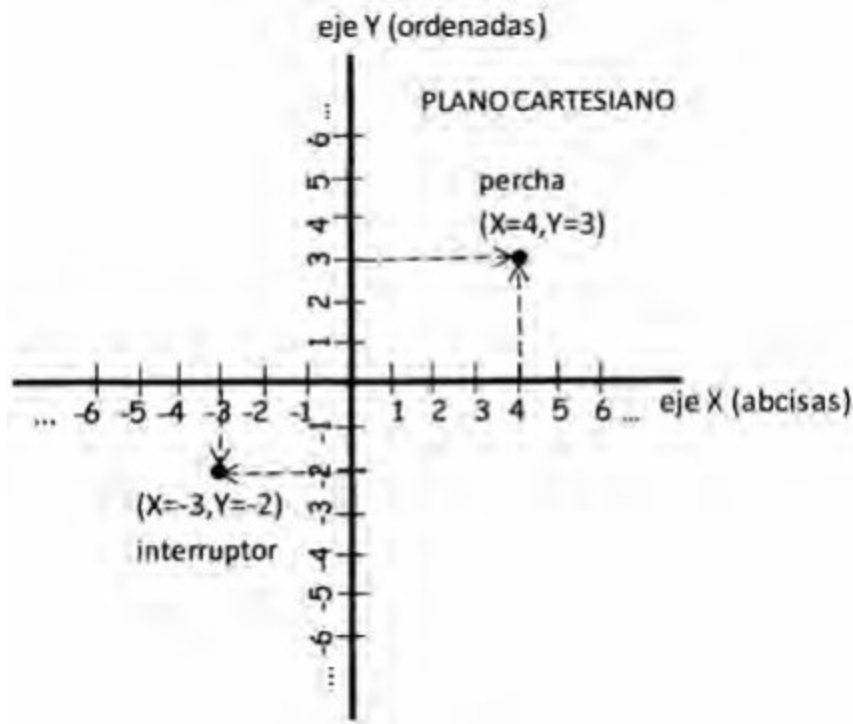
Ahora en la pared colocamos un interruptor eléctrico ¿Cuál es su posición? Muy sencillo, con nuestro sistema de posicionar contando azulejos el interruptor está en la horizontal 3 a la izquierda y en la vertical 2 abajo. O dicho de otra forma, el interruptor tiene de coordenadas: horizontal hacia izquierda = 3, vertical hacia abajo = 2).



Pues bien, esto que te acabo de contar es básicamente el funcionamiento y la construcción de lo que se llama el «sistema de coordenadas cartesianas», que simplemente es un sistema que nos permite posicionar cualquier objeto en un plano. Y esta es la primera idea que tiene que tener clara un niño.

Nuestra pared en geometría sería el «plano», la percha o el interruptor sería el «objeto» y, en vez de determinar las coordenadas del objeto contando azulejos en vertical (arriba o abajo) y en horizontal (derecha o izquierda), lo que hacemos es poner unas rectas perpendiculares y escaladas con números que recojan esta forma de proceder.

Nos fijamos en el dibujo.



Sencillamente, sobre la recta numérica que está en horizontal superponemos otra en vertical, que queden perpendiculares, y se corten en el número 0 de ambas (el origen, el azulejo central).

A cada recta ahora se la llama eje:

- Al horizontal eje X (o de abscisas): valores positivos en este eje indican que estoy a la derecha del origen y valores negativos a su izquierda.
- Al vertical eje Y (o de ordenadas): valores positivos en este eje indican que estoy hacia arriba del origen y valores negativos hacia abajo.

A la superficie que queda delimitada por estos ejes se le llama «plano cartesiano» y sobre él podemos ubicar cualquier objeto, con tan solo indicar dos valores: uno en el eje X y otro en el eje Y, que llamaremos «coordenadas cartesianas (o rectangulares)».

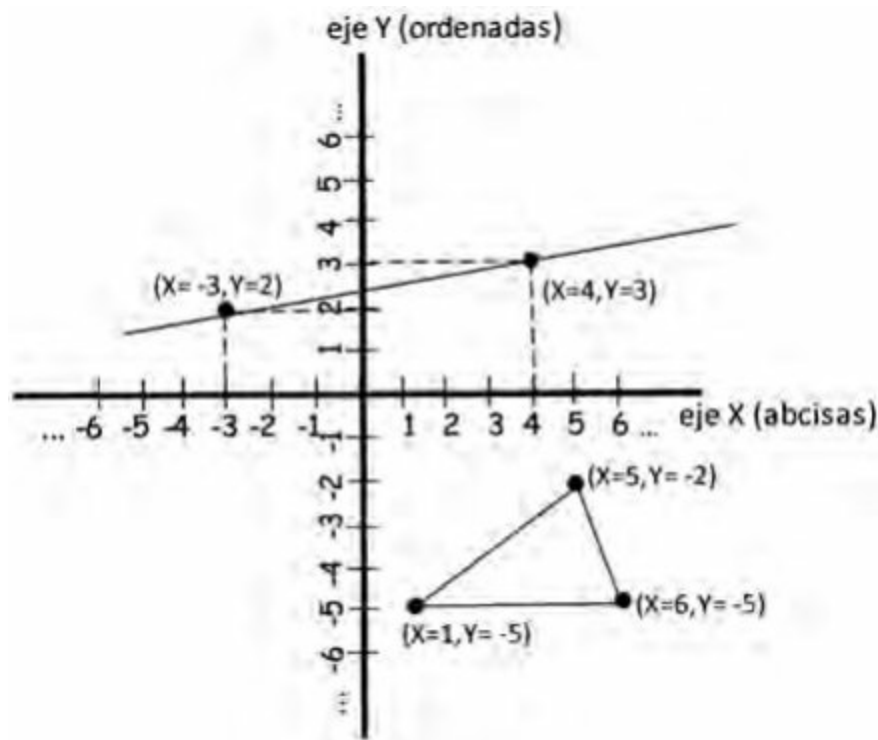
Si yo ahora digo que la percha está en la posición $X = 4, Y = 3$, desde el origen contaría 4 hacia la derecha y desde este punto 3 hacia arriba. A esta posición se la llamaría las coordenadas cartesianas de la percha. El interruptor estaría en la posición $X = -3, Y = -2$, es decir, desde el origen contaría 3 a la izquierda y 2 hacia abajo.

Lo realmente interesante del plano cartesiano es que nos permite posicionar o situar puntos en él en base a unos valores numéricos. ¿Y esto por

qué es tan interesante? Muy sencillo, porque ello nos va a permitir representar en él los elementos de la geometría euclídea (puntos, rectas, planos, figuras...), dando lugar a una nueva visión de la misma, que hasta que apareció el sistema de coordenadas cartesianas no se tenía: es lo que se llama la geometría analítica. De momento no toca. Así que no nos preocupemos por ello.

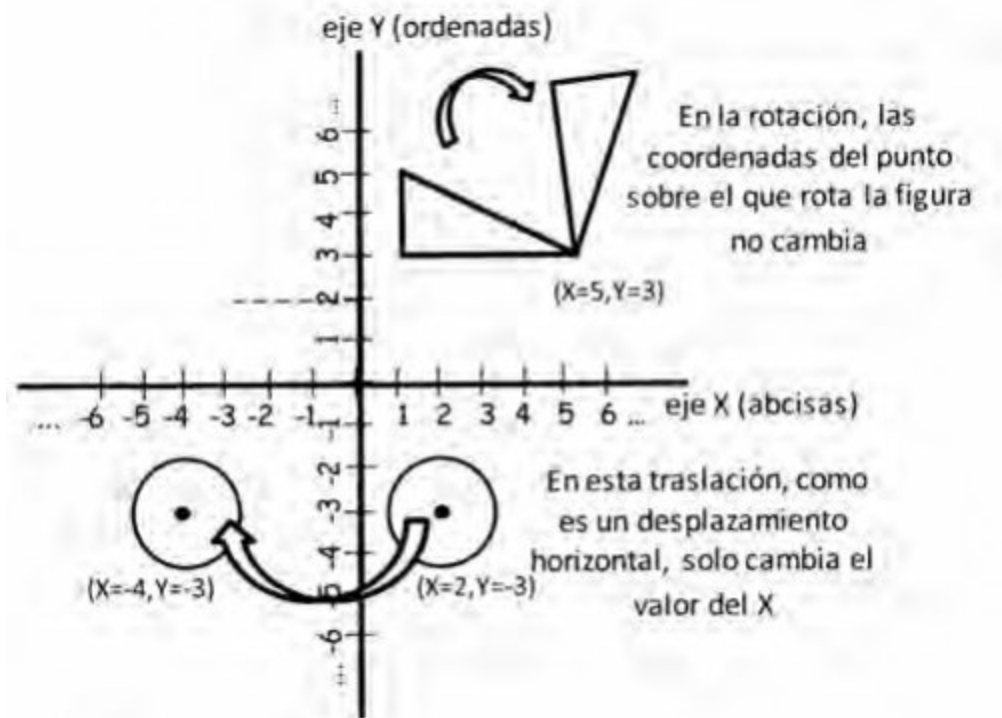
Pero sí es interesante que un estudiante observe dos detalles:

1. Que la idea de «punto» como una «posición» en el espacio es más fácil de comprender a través del sistema de coordenadas cartesianas.
2. Cómo quedan representadas en el plano cartesiano las rectas y figuras geométricas.



En este dibujo se observa cómo queda representada una recta sabiendo la posición de 2 puntos por los que pasa y un triángulo conociendo la posición de sus tres vértices (que son puntos).

Además, las representaciones en el plano cartesiano son de utilidad para analizar los movimientos de traslación, rotación y reflexión, o una combinación de ellos analizando en cada caso cómo cambian las coordenadas.



Por otro lado, este plano tiene un alto valor didáctico para introducir el concepto de variable y función.

Un detalle importante: comprender el concepto de variable y percibir su utilidad para analizar/resolver problemas y representar/expresar las relaciones generales entre los objetos (regularidades) es básico para que un niño avance en el aprendizaje con comprensión de las matemáticas, y no se estanque en lo que hemos llamado «el nivel de la regla de tres». Normalmente la aproximación al concepto de variable se hace a través de traducción de enunciados que conllevan a formular una ecuación:

- Si entre tú y yo, tenemos 10 manzanas y yo tengo 2, ¿cuántas tienes tú?, cuya ecuación es $X + 2 = 10$.
- Si un rectángulo tiene un área de 20, un lado mide 5, ¿cuánto mide el otro?, que da lugar a la ecuación $5X = 20$.

En ambos ejemplos se trata a la variable X como una «incógnita específica», donde se reconoce la existencia de algo desconocido que se puede determinar. Esta forma de proceder, según los estudios, asocia de manera muy fuerte el concepto de variable con el de incógnita, lo que dificulta de cara al futuro la comprensión del concepto de variable desde una visión más amplia (como número general, parámetro o elemento de una relación funcional).

Para evitar esta situación se pueden proponer de forma complementaria contextos múltiples que abarquen los distintos usos de la variable. Así, se pueden proponer traducciones de enunciados que no lleven asociada una solución específica numérica. Por ejemplo, si a María siempre la dan 5 caramelos más que a Pedro, entonces podemos construir una igualdad algebraica (una igualdad que incluye variables) que relacione ambas cantidades y siempre sabremos los que dan a María para cualquier número de caramelos que den a Pedro:

$$Y = X + 5$$

Donde X = número de caramelos que dan a Pedro.

Y = número de caramelos que dan a María.

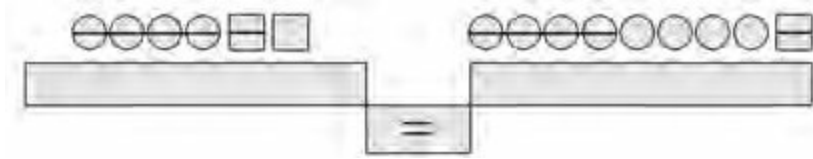
O por poner otro ejemplo: pedimos al niño que complete la siguiente tabla que incluye un indicador de patrón:

X	8	12	34	7	52	21	45	28
X-3	5	9	31		49	18		

Realmente el niño no necesita del indicador de patrón para completar la tabla (normalmente lo hace sin él), pero si le pides que interprete el significado del indicador, casi seguro lo hará de forma correcta. Esto no significa que un niño pueda escribir en notación simbólica la relación que se da entre ambas filas de números, pero sí que esté capacitado para entenderla si va acompañada de un contexto adecuado. De la misma forma, si escribimos $a + 0 = a$ puede ser correctamente interpretado por un niño si va acompañado de ejemplos numéricos, aunque no sea capaz de realizar el proceso contrario: escribir por sí solo $a + 0 = a$ después de observar ejemplos numéricos.

Otra herramienta eficaz para comprender y manejar la idea de variable son los «problemas de balanza». Por ejemplo, supongamos una balanza de platillos que se encuentra en equilibrio (de esas que en uno de los platillos se pone el objeto que se quiere pesar y en el otro se van añadiendo pesas calibradas hasta que ambos platillos se equilibran). En el platillo derecho hay 8 canicas + 1 dado y en el izquierdo hay 4 canicas + 2 dados. ¿Cuánto es el peso de un dado? Si a cada platillo le quito 4 canicas la balanza sigue en equilibrio, pero

ahora en el platillo derecho hay 4 canicas + 1 dado y en el izquierdo 2 dados. Ahora cogemos y a cada platillo le quito 1 dado, de esta manera la balanza sigue en equilibrio pero en el platillo derecho hay 4 canicas y en el izquierdo 1 dado, luego sería fácil observar que cada dado pesa lo mismo que 4 canicas.



Entonces si 1 dado pesa lo mismo que 4 canicas, y una canica pesa 1 kg, ¿cuántos kg pesa el dado? ¿Y si en vez de 1 kg una canica pesa 2? ¿Y si en vez de 2 pesa 3?

Como ves, resolver la balanza y las preguntas adicionales permiten no solo aproximarse al concepto de variable, sino también al de relación funcional, así como comprender/manejar de manera informal igualdades algebraicas.

En definitiva, comprender el concepto de variable es clave si queremos que el niño de mayor esté de acuerdo con Descartes cuando decía que «la matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles».

4

ESTADÍSTICA

1. QUÉ ES Y PARA QUÉ SIRVE LA ESTADÍSTICA

Lo primero que tenemos que hacer es olvidarnos de los tópicos que la definen con frases elocuentes pero muy alejadas de lo que es en realidad. Todos hemos oído decir que la estadística es la ciencia que demuestra que «si tú tienes dos coches y yo no tengo ninguno, los dos tenemos uno». Afirmaciones como esta lo único que demuestran es el desconocimiento y la ignorancia de lo que es la estadística. Entonces, ¿qué es? ¿Qué idea hay que transmitir sobre lo que es? Muy fácil. Te llevas al cine a tu hijo junto con cuatro amigos, preguntas qué película quieren ver y tres te dicen que Corbatas del Caribe, otro que El Rey Peleón y el último que El Señor de los Pasillos. A continuación, lo normal es que saques entradas para la primera de ellas. Esto que acabas de hacer es estadística pura y dura:

1. Has recopilado información (los datos): qué película quiere ver cada niño.
2. Has analizado e interpretado: sabes cuál es la película que más niños quieren ver.
3. Ello te ha servido para tomar una decisión: de qué película sacar tiques.

Es que la estadística es esto, simplemente es una ciencia que se dedica a la recogida, el análisis y la interpretación de datos. ¿Con qué fin? Fundamentalmente, obtener conclusiones que faciliten la toma de decisiones.

La estadística está presente (y cada vez más) en nuestra vida cotidiana, forma parte de ella de la misma forma que lo hace la geometría o la aritmética: cuando el pediatra de tu hijo le receta un nuevo medicamento es que detrás hay un estudio estadístico que ha demostrado su mayor efectividad; cuando solicitas un crédito a un banco, las preguntas que te hacen no son tontas ni en vano, pues con las respuestas se aplican técnicas estadísticas que permiten determinar tu riesgo de impago; cuando vas al supermercado y ves cada vez más productos que se venden en formatos individuales o con menos peso es porque el fabricante ha estudiado la evolución a lo largo de los últimos años del número de hogares unipersonales y ha observado que su tendencia es creciente... Todo esto es estadística.

Un estudiante de Primaria se tiene que grabar una cosa en la cabeza: los datos hablan y la estadística es su idioma; hacer estadística consiste en descubrir lo que nos dicen.

2. LOS DATOS

Para poder hacer estadística el punto de partida son los datos: donde hay datos, hay estadística.

Los datos pueden ser de dos tipos: datos cuantitativos y datos cualitativos. Por ejemplo, una profesora quiere hacer un estudio sobre la altura de sus alumnos: uno medirá 140 cm, otro 145, otro 150, etc., es decir los datos de la altura se pueden medir o cuantificar con números y por eso son de tipo cuantitativo. De la misma forma, si el estudio fuera sobre el número de hermanos que tiene cada alumno (0,1, 2, 3...), los datos también son cuantitativos. En cambio, si la profesora hubiese hecho un estudio sobre el color de los ojos habría anotado de cada alumno si son azules, verdes o castaños, pero estos datos no se pueden medir, sencillamente representan una cualidad (en este caso el color) y por eso se les llama datos de tipo cualitativo, al igual que si el estudio hubiera recogido información sobre su continente de nacimiento (Europa, Asia, África, América, Oceanía).

Pero sean los datos de tipo cuantitativo o cualitativo, es necesario organizarlos para poder trabajar con ellos, y este es el siguiente paso que tiene que aprender a dar un niño en el mundo de la estadística.

3. LA ORGANIZACIÓN DE LOS DATOS

El niño tiene que percibir que con datos desorganizados es difícil hacer estadística; sería similar a intentar buscar el significado de una palabra teniendo las letras desordenadas. ¿Y esto cómo lo hace? Pues de una forma muy sencilla: construyendo «tablas». Sigamos con el ejemplo de la profesora que quiere hacer un estudio sobre el color de ojos de sus 10 alumnos. Saca la lista de clase y anota por su orden el color de cada uno de ellos: castaño, castaño, verde, azul, azul, castaño, castaño, castaño, azul, verde.

Con los datos puestos de esta forma poco podemos hacer, mejor construimos una tabla con ellos. En una columna anotaremos los diferentes colores de ojos y en otra el número de niños que tienen el mismo color (frecuencia absoluta).

Frecuencia absoluta: número de veces que se repite cada dato o valor.

Color de los ojos	N° de alumnos con el mismo color (frecuencia absoluta)
Azul	3
Castaño	5
Verde	2
Total alumnos = 10	

Esta tabla será el punto de partida para realizar el análisis de los datos; se conoce como tabla de frecuencias.

El niño tiene que observar que la suma de las frecuencias absolutas es el número total de datos; en el ejemplo que te he puesto como había 10 alumnos, hay 10 datos.

Si ahora quisiéramos saber cuántos alumnos tienen el mismo color en relación al total de alumnos, estaríamos calculando lo que se llama frecuencia relativa.

Frecuencia relativa de un dato o valor: es la frecuencia absoluta de un determinado valor dividida entre el número de datos.

Color de los ojos	Nº de alumnos con el mismo color (frecuencia absoluta)	Nº de alumnos con el mismo color en relación al total de alumnos (frecuencia relativa)
Azul	3	3/10
Castaño	5	5/10
Verde	2	2/10
Total alumnos = 10		

Las frecuencias relativas son proporciones (tantos por uno), así que si la multiplicamos por 100 obtenemos el porcentaje de alumnos con el mismo color de ojos:

Frecuencia relativa $\times$ 100 = porcentaje que representa cada dato o valor del total de datos.

Color de los ojos	Nº de alumnos con el mismo color (frecuencia absoluta)	Nº de alumnos con el mismo color en relación al total de alumnos (frecuencia relativa)	Porcentaje de alumnos con el mismo color de ojos (frecuencia relativa $\times$ 100)
Azul	3	3/10 = 0,3	30%
Castaño	5	5/10 = 0,5	50%
Verde	2	2/10 = 0,2	20%
Total alumnos = 10			

Sigamos con la organización de datos. El ejemplo que hemos visto era con datos cualitativos; pongamos otro con datos cuantitativos. La profesora hace un test con 20 preguntas de matemáticas a la clase de tu hijo para ver qué nivel tienen, y anota en la lista de clase las respuestas correctas (puntuación) de

cada uno de los 10 alumnos: 12, 12, 15, 15, 15, 15, 17, 17, 17, 19. Como para poder hacer el estudio estadístico necesita organizar la información (los datos), construimos la tabla de frecuencias:

Puntuación en el test	Nº de alumnos con la misma puntuación (frecuencia absoluta)	Nº de alumnos con la misma puntuación en relación al total de alumnos (frecuencia relativa)	Porcentaje de alumnos con la misma puntuación (frecuencia relativa x 100)
12	2	$2/10=0,2$	20%
15	4	$4/10=0,4$	40%
17	3	$3/10=0,3$	30%
19	1	$1/10=0,1$	10%
Total alumnos = 10			

Esta tabla se leería de la siguiente forma (por ejemplo las dos primeras filas):

- Con una puntuación de 12 hay 2 alumnos (frecuencia absoluta), es decir, 2 de los 10 (frecuencia relativa), que esto es un 20% de los alumnos de la clase (porcentaje de alumnos).
- Con una puntuación de 15 hay 4 alumnos (frecuencia absoluta), es decir, 4 de los 10 (frecuencia relativa), que esto es un 40% de los alumnos de la clase (porcentaje de alumnos).

A un estudiante de Primaria le tiene que quedar bastante claro cómo se leen y construyen estas tablas de frecuencias. Pero estas no son las únicas que tiene que conocer. Hay otras, las de doble entrada (o de contingencia). Por ejemplo, la profesora quiere estudiar simultáneamente la información de la puntuación obtenida en el test por sus diez alumnos y el color de sus ojos. Los datos de cada alumno son los siguientes:

(12, castaño) (12, verde) (15, azul) (15, azul) (15, castaño)
(15, castaño) (17, castaño) (17, castaño) (17, azul) (19, verde)

Para poder trabajar con esta información, construimos una tabla donde la

fila superior recoge las distintas categorías de color de ojos y la columna izquierda las distintas puntuaciones en el test: donde se intersecciona la fila con la columna recoge la cantidad de alumnos que «simultáneamente» tienen «tal color de ojos y tal puntuación» (serían las frecuencias absolutas).

Color Puntuación	Azul	Castaño	Verde
12		1	1
15	2	2	
17	1	2	
19			1

Por ejemplo, hay 2 alumnos con el color de ojos azul y que tienen una puntuación de 15, hay otros 2 alumnos con ojos castaños y una puntuación de 17, hay 1 alumno con ojos verdes y una puntuación de 19, etc.

En esta tabla el alumno tiene que observar una cosa, si hago los totales de las filas y los anoto en una columna en el margen derecho, obtengo la tabla de frecuencias de la puntuación en el test. Y si calculo los totales de las columnas y los anoto en una fila en el margen inferior, obtengo la tabla de frecuencias del color de los ojos.

Color Puntuación	Azul	Castaño	Verde	Frecuencias absolutas de la puntuación
12		1	1	2
15	2	2		4
17	1	2		3
19			1	1
Frecuencias absolutas del color de ojos	3	5	2	10 = total de alumnos

Una vez que el niño sabe organizar los datos, el siguiente paso sería aprender a representarlos en un gráfico.

4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS DATOS

Las representaciones gráficas de los datos son unas herramientas visuales que facilitan su interpretación y análisis. Son una especie de radiografía que con un simple vistazo te permite comenzar a entender lo que nos quieren decir los datos. Pero una radiografía es una herramienta de diagnóstico más, que en algunos casos es suficiente para que el médico tome una decisión, pero en otros no.

El punto de partida para poder hacer un gráfico son las tablas de frecuencias (o tablas estadísticas). De manera informal, un diagrama de barras lo podemos hacer con tan solo trazar junto a la tabla una línea de longitud igual o proporcional a su frecuencia (absoluta o relativa). Con los ejemplos que hemos venido manejando tendríamos:

Color de ojos	Frecuencia absoluta
azul	3
castaño	5
verde	2



Puntos test	Frecuencia absoluta
12	2
15	4
17	3
19	1



Para interpretar el gráfico, un niño solo tiene que tener en cuenta la relación entre longitud de la barra y frecuencia (a más longitud más frecuencia):

- El color castaño es el más frecuente y el verde el menos frecuente.
- La puntuación más habitual ha sido de 15, mientras que la menos frecuente ha sido de 19.

5. LAS MEDIDAS DE POSICIÓN: LA MEDIA Y LA MODA

El estudiante ya sabe organizar la información en una tabla, ha aprendido a realizar gráficos partiendo de ella y lo que ahora toca es aprender a resumirla en unos pocos datos que permitan analizarla e interpretarla. Como ya te he dicho, los datos hablan y la estadística es su idioma, así que vamos a empezar aprendiendo sus primeras palabras: media y moda.

5.1. Media aritmética (o simplemente media)

Una primera idea intuitiva sobre lo que es la media la obtenemos cuando queremos distribuir el total de algo en partes iguales. Por ejemplo, un niño tiene 2 caramelos en la mano, otro 1 caramelo y otro 9. Si queremos repartir los caramelos que tienen entre los tres a partes iguales, cogeríamos todos los caramelos que tienen ($2 + 1 + 9 = 12$) y los dividiríamos entre 3, siendo el resultado de 4 caramelos. Es decir, si cada uno tuviera 4 caramelos el total de caramelos estaría repartido de forma equitativa.

Esta aproximación intuitiva al concepto de media nos permite entender su forma de cálculo, pero profundicemos un poco más en ella.

Sigamos con el ejemplo de las notas en el examen. Te recuerdo la puntuación que obtuvieron los 10 alumnos de la clase: 12, 12, 15, 15, 15, 15, 17, 17, 17, 19. Con estos, para hallar la puntuación media de la clase sencillamente sumaría todas las notas y las dividirías entre los 10:

$$\text{Media de puntos} = (12 + 12 + 15 + 15 + 15 + 15 + 17 + 17 + 17 + 19)/10 = 15,4 \text{ puntos}$$

Esto lo hubiésemos hecho si no supiésemos organizar los datos. Pero sabemos. Si hacemos uso de la tabla de frecuencias absolutas este cálculo se simplifica, porque ya tenemos anotado cada dato con el número de veces que se repite:

$$(12 \times 2 + 15 \times 4 + 17 \times 3 + 19 \times 1) / 10 = 154/10 = 15,4 \text{ puntos}$$

Puntuación en el test	Nº de alumnos con la misma puntuación (frecuencia absoluta)	Puntuación x frecuencia absoluta
12	2	$12 \times 2 = 24$
15	4	$15 \times 4 = 60$
17	3	$17 \times 3 = 51$
19	1	$19 \times 1 = 19$
Total alumnos = 10		Total puntos = 154

Es decir, para calcular la media solo hay que dar dos pasos:

1. Sumamos todos los datos (si tenemos las frecuencias absolutas multiplicamos cada dato por su frecuencia y sumamos todos estos productos).
2. Dividimos el resultado anterior por el número total de datos.

Bien, una vez que sabemos calcularla, el siguiente paso es saber qué nos dice, es decir, analizarla e interpretarla.

Supongamos que estamos viendo por la tele un partido de fútbol del Mundial. En pantalla aparecen los nombres de los jugadores de uno de los equipos junto con la edad que tiene cada uno, y el locutor de televisión añade el siguiente comentario: «La edad media de este equipo es de 21 años, es un equipo muy joven, quizá acuse la falta de experiencia en esta competición». Pues bien este comentarista acaba de dar un curso intensivo de estadística: toda la información que tú estabas viendo en pantalla te la ha resumido en un dato, la edad media, y según el análisis y la interpretación de este dato, ha sacado una conclusión: la falta de experiencia le puede perjudicar.

Entonces la primera idea que un estudiante de Primaria tiene que tener clara sobre la media es que es una medida que «resume la información de los datos», es un valor representativo de un conjunto de datos, indicándote dónde se encuentra o posiciona el dato medio de todos los datos que tienes (en el ejemplo que te he puesto, un futbolista de 21 años es el futbolista promedio o típico del equipo).

Supón ahora que salen en pantalla los nombres y las edades de los jugadores del otro equipo y el locutor dice que la edad media del equipo rival es de 28 años, y que por tanto, es un equipo con mayor experiencia que la puede hacer valer si el partido se complica. En este caso el comentarista ha comparado la edad media de los dos equipos (21 contra 28) y ha sacado otra conclusión. Entonces la media nos ha servido para comparar dos grupos distintos de datos (esto se usa con bastante frecuencia en estudios médicos para comparar, por ejemplo, la eficacia de los medicamentos).

Ahora el locutor comenta que se rumorea que el equipo tiene pensado fichar a un jugador de 32 años, y que eso le va a dar mucha veteranía y saber estar al equipo. Aquí lo que se ha hecho ha sido usar el dato medio (los 21 años) como punto de referencia para comparar otro dato.

Y para terminar con la narración del locutor, supongamos que dice que el jugador «tal» cada vez cuenta más con la confianza del entrenador, que solo hay que ver sus números: la temporada pasada jugó una media de 20 minutos por partido, pero que esta lo está haciendo una media de 60 minutos. Es decir, ha vuelto a usar la media como elemento de comparación, en este caso el tiempo medio jugado por partido en dos temporadas diferentes.

Entonces la segunda idea que hay que tener clara sobre la media es que es un punto de referencia para hacer comparaciones.

Vayamos a por la tercera idea, es muy sencilla: la media es muy sensible a valores extremos. Supongamos que estamos calculando el número medio de perros que tienen los compañeros de clase de tu hijo: Pedro tiene 2, María 1, Raquel 0, David 1, Daniel 1, Sara 3, Silvia 0 y Alejandro 0.

Hacemos la cuenta $(2 + 1 + 0 + 1 + 1 + 3 + 0 + 0)/8 = 1$, es decir, la media nos da 1 perro por hogar, ¿pero qué hubiese pasado si el padre de Alejandro fuese el propietario de un refugio canino con 64 perros? Sencillamente se habría disparado el valor de la media: $(2 + 1 + 0 + 1 + 1 + 3 + 0 + 64)/8 = 9$ perros por hogar. Y esta es una de sus debilidades como medida de posición: la distorsión que sufre debido a su sensibilidad a valores extremos.

Y para terminar: las unidades de medida de la media son las mismas que las de la variable, es decir, si estoy estudiando la variable «consumo de leche en los hogares» y lo medimos en litros, el «consumo medio» por hogar también son litros.

5.2. La moda

Como hemos visto con la media aritmética, cuando tenemos varios datos es conveniente resumirlos en uno que pueda aportar información de utilidad para el análisis que queremos hacer. Puede ser muy interesante buscar aquel dato que más se repite, que se da con más frecuencia. A este valor le llamamos moda. Supongamos que tienes una zapatería. Bien, evidentemente tienes que tener zapatos en stock, pero la cuestión es de qué número tener más. No es descabellado pensar que si sabes que en el hombre el número más frecuente es el 43 y en mujeres el 37, de estos números tengas más en almacén que del resto.

En término de frecuencias absolutas y relativas diríamos que la moda es el dato que tiene mayor frecuencia absoluta (y, por tanto, también relativa).

En los ejemplos que hemos venido manejando, tendríamos que el color de ojos frecuente o modal es el castaño y que la puntuación más frecuente es 15 puntos (echa un vistazo a las tablas de frecuencias de estos ejemplos).

Y dos detalles. El primero, que a diferencia de la media, la moda se puede calcular cuando los datos son cualitativos, como en el estudio sobre el color de los ojos: sabemos que el color más frecuente es el castaño pero no hay color medio.

El segundo detalle es que en un conjunto de datos puede haber más de una moda; supongamos la siguiente distribución que recoge información sobre los deportes que practican los alumnos de una clase.

Deporte	Frecuencia absoluta (nº de niños que lo practican)	Frecuencia relativa (nº de niños que los practican en relación al total)
Fútbol	5	5/25
Baloncesto	4	4/25
Natación	7	7/25
Atletismo	2	2/25
Judo	7	7/25
Total niños = 25		

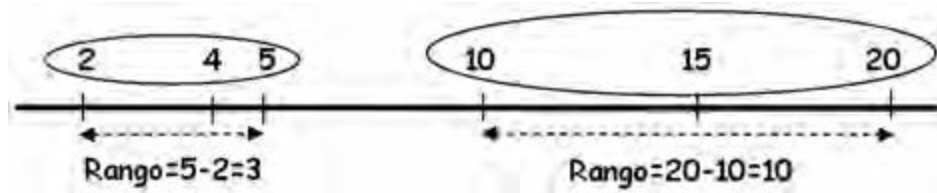
Como puedes observar, los deportes más practicados (la moda) son dos: judo y natación. Si pusiésemos un puesto ambulante con artículos deportivos en las puertas del colegio, sería acertado que sobre todo tuviera bañadores y kimonos.

Para terminar con la moda, decir que en los diagramas de barras es fácil observarla: sencillamente es el dato que tiene la barra de mayor longitud. Lo podemos comprobar en los diagramas que aparecen en las páginas 86 y 87.

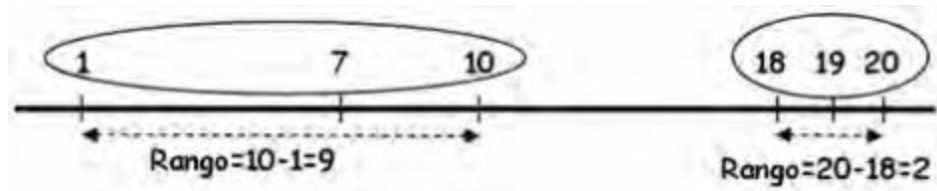
6. MEDIDAS DE DISPERSIÓN: EL RANGO

De la misma forma que es interesante calcular las medidas de posición de los datos como la media y la moda, también es interesante estudiar su dispersión, es más, podemos afirmar que su estudio es clave en cualquier análisis estadístico. Una aproximación a la idea de dispersión de los datos nos la puede dar la distancia que separa a unos de otros. Si las distancias son pequeñas, los datos tienden a estar próximos y la dispersión es baja. Por el contrario, si las distancias son grandes, los datos tienden a estar alejados y la dispersión es

alta. Por ejemplo, el grupo de datos (2, 4, 5) está menos disperso que el (10, 15, 20).



De la misma forma el grupo de datos (1,7,10) está más disperso que el (18,19,20).



Hay varias medidas de dispersión, pero tu hijo solo va a conocer una: el rango.

Sencillamente es la diferencia entre el valor más alto de los datos y el más bajo:

$$\text{Rango} = \text{Valor Máximo} - \text{Valor Mínimo}$$

Para calcularlo, se ordenan los datos y se halla la diferencia entre el mayor y el menor. Cuanto más grande sea el resultado, más dispersión (observa los dibujos anteriores). Por ejemplo, si en la verbena de las fiestas de un pueblo se calcula el rango de la edad, este puede ser de 99 años (posiblemente haya algún bebé y algún anciano). Los datos de la edad están muy dispersos. En cambio, en una guardería los datos de la edad están menos dispersos, el rango puede que sea de 2 años.

$$\text{Rango edad verbena} = 100 \text{ años} - 1 \text{ año} = 99 \text{ años}$$

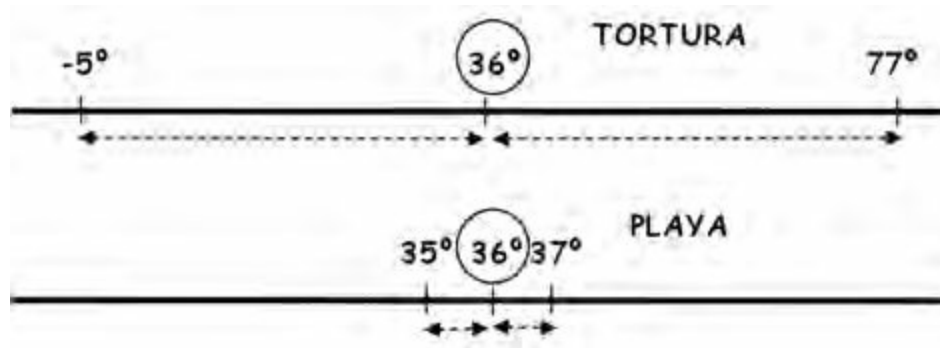
$$\text{Rango edad guardería} = 3 \text{ años} - 1 \text{ año} = 2 \text{ años}$$

Pero, ¿por qué es tan importante la idea de dispersión de los datos? Te voy a poner un sencillo ejemplo. Supongamos que a una persona tumbada en la playa le tomamos la temperatura en la cabeza y en los pies, siendo estos valores de 37° y 35° respectivamente. Ahora le metemos la cabeza en un horno y los pies en un congelador, y volvemos a tomar la temperatura en estas partes

del cuerpo: 77° y -5° . Bien, hagamos cuentas. Si calculamos la temperatura media de las dos situaciones, la de la playa y la tortura, tenemos que:

$$\begin{aligned}\text{Temperatura media playa} &= (37 + 35)/2 = 36^{\circ} \\ \text{Temperatura media tortura} &= (-5 + 77)/2 = 36^{\circ}\end{aligned}$$

Es decir, que resulta ser la misma.



Posible conclusión: la persona en términos medios está igual de bien en las dos situaciones. Evidentemente esta afirmación es un absurdo, la playa es una buena situación pero la tortura no, y la estadística sabe distinguir una situación de otra a través de la idea de dispersión. Cuando la persona está tumbada en la playa, la dispersión de los datos es baja, los valores de las temperaturas que hemos tomado están próximos entre sí, están separados 2 grados ($37^{\circ}-35^{\circ}$), y el valor medio refleja bien la situación de la persona. Pero en la situación de tortura los valores de la temperatura están mucho más dispersos, están separados 82 grados [$77^{\circ}-(-5^{\circ})$] y el valor medio refleja de manera incorrecta la situación de la persona.

Por eso cuando se define la estadística como «la ciencia que te dice que si metes a una persona los pies en el congelador y la cabeza en un horno está a la temperatura ideal», se está cometiendo una injusticia, porque en este caso la estadística te dice que no hagas caso del dato medio, que es poco representativo porque los datos están muy dispersos.

A veces cuando leemos en los periódicos algunas noticias que incluyen el dato medio de algo, como por ejemplo un consumo medio de cerveza o de renta media, pensamos: alguien se está atragantando de cerveza o alguien se está inflando a ganar dinero, y cosas por el estilo, y sencillamente es así porque percibes que ese dato medio no refleja la realidad que conoces. Posiblemente corresponda a una situación de datos con mucha dispersión. De hecho, en las revistas técnicas, cuando se da un dato medio, entre paréntesis y a

continuación se pone un dato que mide la dispersión de los mismos, para que quien lo lea pueda tener una idea de la representatividad de esa media.

Y te puedo asegurar una cosa, es más importante que un estudiante de Primaria entienda la idea de dispersión que saber el nombre de un polígono de seis lados.

7. LOS EXPERIMENTOS ALEATORIOS

7.1. Qué es un experimento aleatorio

Un estudiante de Primaria tiene que empezar comprendiendo lo que es un fenómeno o experimento aleatorio.

- Cada vez que lanzo una moneda al aire, puede salir cara o puede salir cruz, pero no sé cuál de los dos resultados se va a dar y aunque me pase toda la tarde lanzando la moneda, antes de lanzarla nunca sabré con certeza si va a ser cara o cruz.
- Cuando tiro un dado puede salir una puntuación del 1 al 6, pero no sé cuál de estos seis números será, y por muchas veces que tire el dado siempre me va a ocurrir esto: mi ignorancia sobre el resultado final.

Estos son los ejemplos clásicos de lo que se llaman experimentos aleatorios, que sencillamente son experimentos que pueden dar lugar a varios resultados (antes de realizarlos), pero el resultado final no se conoce con certeza (por muchas veces que lo repitamos). Lo único que sabemos con certeza es que la moneda y el dado al tirarlos van a caer al suelo en una posición.

7.2. La observación de los experimentos aleatorios

En principio, el mejor escenario para observar experimentos aleatorios son los juegos de azar asociados a lanzamientos de monedas, dados, juegos de cartas, loterías, bingos... Pero es conveniente que un estudiante de Primaria tenga una visión más amplia de lo que es un experimento aleatorio. Te explico. La reacción de un león cuando le impacta una piedra que le hemos tirado es un experimento aleatorio, porque pueden ocurrir tres cosas: que el león corra

huyendo, que el león nos ataque o que ni se inmute, pero antes de que impacte la piedra nosotros no sabemos lo que va a ocurrir. Evidentemente es un ejemplo, no te invito a que lo hagas.

También es importante que distinga lo que es un experimento «aleatorio» de uno «determinístico». Por ejemplo, si cogemos una máquina de lanzar pelotas de tenis (que funcione correctamente) y apuntamos a una portería de fútbol con una distancia, ángulo y potencia adecuada, el resultado final siempre es el mismo: la pelota entra en la portería. Esto sería un experimento determinístico, es decir, un experimento en el que conozco el resultado final y siempre que lo repita en las mismas condiciones el resultado va a ser el mismo. Pero, ¿y si ponemos a Iker Casillas en la portería? Pues muy sencillo, que ahora cuando lance la pelota pueden ocurrir dos resultados: que entre en la portería o que la pare Iker, pero no sé con certeza cuál de las dos va a ocurrir. Ahora el experimento es aleatorio, y por muchas veces que lo repita en condiciones similares el resultado final puede ser uno u otro.

Vamos a empezar definiendo algunos conceptos básicos para comprender mejor estos experimentos, en concreto el de «espacio muestral» y «suceso simple o elemental» de un experimento aleatorio.

Como ya hemos dicho, cuando lanzo una moneda al aire, pueden ocurrir dos cosas: o sale cara o sale cruz; pues bien, a cada una de estas cosas que pueden ocurrir la llamamos «suceso simple o elemental» y al conjunto de todos ellos «espacio muestral» (o también espacio de resultados).

En principio es recomendable hacer observar a un estudiante cuál es el espacio muestral (o de resultados) de los experimentos aleatorios (los sucesos elementales que lo componen).

Experimento aleatorio	Espacio muestral (sucesos elementales)
Tirar moneda al aire	cara, cruz
Tirar dado al aire	1, 2, 3, 4, 5, 6
Tirar dos monedas al aire	cara y cara, cruz y cruz, cara y cruz, cruz y cara
Sacar una carta de la baraja y observar su palo	oros, bastos, copas y espadas

Un partido de fútbol entre equipos A y B	gana A, gana B, empatan A y B
Reacción del león por impacto de piedra	huye, ataca, indiferencia
Extraer bola de una urna con bolas rojas y blancas	bola roja, bola blanca
Lanzar un penalti	gol, no gol

Una vez que entienda lo que es «un experimento aleatorio» y sepa determinar los sucesos elementales que pueden ocurrir (el espacio muestral), tiene que comprender que todo suceso tiene su complementario y que siempre ocurre uno u otro. Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado, un suceso es «que salga el 2», pues bien su suceso complementario es «que NO salga el 2», es decir, que salga cualquier otra puntuación (1, 3, 4, 5 o 6). O en el experimento del león, un suceso es que «ataca» y su complementario que «NO ataca», es decir, que se quede indiferente o que huya. Cuando un suceso está formado por varios elementales, como en este caso el de «No ataque», se dice que el suceso es «compuesto». Por ejemplo, al tirar un dado el suceso «salir par» es «compuesto» porque está formado por los sucesos elementales: salir 2 o salir 4 o salir 6.

Pero el ser humano es curioso, y a estas alturas del libro ya sabes que nos encanta medir y cuantificarlo todo, entonces, ¿por qué no medir nuestra ignorancia sobre lo que puede ocurrir en estos experimentos, por qué no medir la incertidumbre, por qué no medir la posibilidad de que el león nos ataque si le damos con una piedra? Pues hagámoslo con algo que llamaremos probabilidad. ¿Y qué es?

8. QUÉ ES LA PROBABILIDAD

Sencillamente una medida de la posibilidad de que algo ocurra, es una medida de la incertidumbre (de la misma forma que el volumen es una medida del espacio que ocupa un objeto).

La probabilidad de que ocurra un suceso siempre es un número mayor o igual a 0, porque como cualquier medida en matemáticas siempre tiene que ser una cantidad no negativa. Más en concreto, está comprendida entre 0 y 1:

- Si vale 0 el suceso es imposible que ocurra.
- Si vale 1 es seguro que va a ocurrir.
- En general, cuanto más próximo a 1 más probable es.

Pero un niño percibe mejor las diferencias con números escalados de 0 a 100, es decir, percibe mejor la diferencia que hay entre 14 y 30 que entre 0,14 y 0,30. En conclusión, si quieres, habla de probabilidades en porcentaje: tal suceso tiene una probabilidad de ocurrir del 40% en vez de 0,4.

También hay que tener en cuenta que la suma de la probabilidades de todos los sucesos que forman el espacio muestral vale 1 (o el 100%). Esto siempre es así, porque el espacio muestral es el conjunto de todos los sucesos elementales que pueden ocurrir en el experimento, y alguno de ellos es seguro que se tiene que dar. Por ejemplo, al tirar la moneda al aire o sale cara o sale cruz, pero una de las dos es seguro que sale (la probabilidad de salir cara es del 50%, la de cruz otro 50% y la suma es el 100%).

Como un suceso cualquiera y su complementario forman el espacio muestral, la suma de la probabilidad de un suceso y su complementario vale 1. Por ejemplo, en el experimento de dar con una piedra al león, si la probabilidad del suceso «ataca» es del 80%, el resto de probabilidad hasta el 100%, es decir el 20%, corresponde a la probabilidad del suceso complementario «NO ataca» (que como hemos visto está compuesto por los sucesos de «huye» o «indiferencia»).

Hay varias maneras de entender y calcular la probabilidad, pero siempre el resultado tiene que ser un número comprendido entre 0 y 1 (o 0 y 100). En principio vamos a considerar dos enfoques: el de la probabilidad «teórica» o «a priori» y el de la probabilidad «experimental» o «a posteriori».

Probabilidad «teórica» o «a priori»: su cálculo se lo debemos al matemático, físico y astrónomo Laplace, quien encontró la forma de calcularla cuando en el experimento todos los resultados o casos posibles tienen la misma probabilidad:

$$\text{Probabilidad de un suceso} = \frac{\text{casos o resultados favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Por ejemplo, en una caja meto 100 canicas: 30 de color negro y 70 de color rojo. Nosotros queremos calcular la probabilidad de que al sacar de la caja una cualquiera al azar sea negra.

Suceso	Casos favorables	Casos posibles	Probabilidad del suceso
Sacar canica negra	30	100	$30/100 = 0,3$ (30%)

Entonces el valor de la probabilidad que buscamos es del 30%. Y que no se nos olvide que en este cálculo admitimos que todas las canicas (casos posibles) tienen la misma probabilidad de ser extraídas de la caja.

Probabilidad «experimental» o a posteriori. La probabilidad anterior también la podríamos haber calculado de otra forma. Sacamos de la caja una canica y anotamos su color y a continuación devolvemos la canica a la caja. Supongamos que repetimos este procedimiento muchas veces, 60 por ejemplo, y hemos anotado que 15 veces sacamos canica negra y 45, canica roja.

Suceso	Número de veces que sale negra	Número total de repeticiones	Frecuencia relativa de sacar canica negra
Sacar negra	15	60	$15/60=0,25$ (25%)

Es decir, la frecuencia relativa de sacar canica negra es del 25%. Pues bien, si tomamos esta frecuencia relativa calculada después de muchas repeticiones en las mismas condiciones, como probabilidad del suceso, estamos calculando una probabilidad de manera «experimental».

Quiero que observes tres detalles sobre la probabilidad «experimental»:

1. A diferencia de la «teórica», no supone que cada canica tiene la misma probabilidad de ser elegida. Es más, para calcularla no necesitamos ni saber el total de canicas que hay en la caja.
2. A diferencia de la «teórica», la probabilidad «experimental» indica la probabilidad sobre la base de lo que realmente sucede en un experimento, no sobre lo que teóricamente sucederá.
3. Para calcular la probabilidad «experimental», el experimento se tiene que repetir en las mismas condiciones (por eso al sacar una canica la devolvíamos a la caja antes de sacar la siguiente).

Pongamos otro ejemplo, el clásico de la moneda. Cuando lanzo una moneda al aire solo se pueden dar dos resultados cara o cruz, y si la moneda

está equilibrada no hay razones para suponer que uno es más probable que el otro, entonces la probabilidad «teórica» de cara (casos favorables/casos posibles) es de $\frac{1}{2}$ y la de cruz también.

Suceso	Casos favorables	Casos posibles	Probabilidad del suceso
Cara	1	2	$\frac{1}{2} = 0,5$ (50%)
Cruz	1	2	$\frac{1}{2} = 0,5$ (50%)
	Total = 2		Total = 1 (100%)

Si hubiésemos calculado la probabilidad experimental de salir cara, hubiésemos lanzado muchas veces la moneda al aire y anotado cada uno de los resultados.

Suceso	Número de veces que sale cara	Número total de repeticiones	Frecuencia relativa de sacar cara (probabilidad experimental)
Cara	120	200	$\frac{120}{200} = 0,60$ (60%)
Cara	300	650	$\frac{300}{650} = 0,46$ (46%)
Cara	504	1.000	$\frac{504}{1.000} = 0,504$ (50,4%)
Cara	994	2.000	$\frac{994}{2.000} = 0,497$ (49,7%)

Como ves en la tabla, cuantas más repeticiones hacemos la frecuencia relativa del suceso «salir cara» tiende a estabilizarse en torno al valor de la probabilidad «teórica» (50%).

Pero si la moneda hubiese estado desequilibrada y no fuese igual de probable al lanzarla que saliese cara o cruz, ambos valores no estarían próximos y de hecho si te jugases el dinero, sería preferible apostar según la probabilidad «experimental», que no supone que la probabilidad de cada caso tiene que ser la misma.

En principio, en la Primaria solo se tiene que saber calcular probabilidades

según el criterio de Laplace (probabilidad = casos favorables/casos posibles).

Te pongo algunos ejemplos.

- En un estanque hay 16 peces, de los cuales 4 son sardinas y los otros 12 de otras especies. ¿Cuál es la probabilidad de que al pescar un pez sea sardina?

Suceso	Casos favorables	Casos posibles	Probabilidad del suceso
Pescar sardinas	4	16	$4/16 = 0,25$ (25%)
Pescar otra especie	12	16	$12/16 = 0,75$ (75%)
	Total = 16		Total = 1 (100%)

La probabilidad de que al pescar un pez sea sardina es de un 25% y de que no lo sea (su suceso complementario) es del 75%. Como ves, entre estos dos sucesos suman una probabilidad de 1 (del 100%) porque cuando pesquemos un pez o es sardina o es de otra especie.

Como hemos aplicado la fórmula de Laplace, hemos supuesto que es igual de probable pescar una sardina que cualquier otro pez. ¿Pero si las sardinas son muy listas y son más difíciles de pescar? Entonces hubiese sido mejor estimar la probabilidad de forma experimental: cada vez que pescamos un pez anotamos si es sardina o no y lo devolvemos al estanque. Después de muchos peces pescados, haríamos el cociente entre número de sardinas pescadas/total de peces pescados y tomaríamos esta frecuencia como valor de la probabilidad.

- En una clase de 12 personas, 4 llevan camiseta blanca, 3 negra y 5 roja. La profesora coge la lista de clase y saca a una persona a la pizarra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una camiseta negra?

Casos favorables (camiseta negra) = 3.

Casos posibles (personas de clase) = 12.

Entonces la probabilidad de que sea negra es de $3/12 = 0,25$ (un 25%).

¿Y cuál sería la probabilidad de que No sea negra? Como es el suceso complementario, el resto de probabilidad hasta 100, es decir, el 75%. Evidentemente este valor coincide con el resultado de dividir casos

favorables/casos posibles, donde caso favorable es camiseta No negra, es decir, camiseta blanca o roja:

$$9/12 = 0,75 \text{ (75\%)}$$

Casos favorables (camiseta blanca o roja) = 9.

Casos posibles (personas de clase) = 12.

En este cálculo como aplicamos la regla de Laplace, admitimos que todos los alumnos tienen la misma probabilidad de ser sacados a la pizarra. ¿Y si no fuera así? Pues sería una mejor estimación la probabilidad «experimental».

Por poner un último ejemplo, en una bolsa hay caramelos. Sabemos que los hay de fresa, limón y naranja, pero no sabemos cuántos de cada. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar al azar uno de la bolsa, sea de fresa? Como no conozco los casos favorables que hay, difícilmente puedo calcular la probabilidad por Laplace, así que solo nos queda una alternativa, la experimental: saco un caramelo, anoto el sabor y lo devuelvo a la bolsa. Después de muchas repeticiones, haríamos el cociente entre:

Número de veces que saco de fresa/Número total de repeticiones

Después, tomaríamos esta frecuencia como valor de la probabilidad. Si hemos hecho 160 repeticiones y hemos sacado 32 veces caramelo de fresa, entonces estimamos la probabilidad en un valor de $32/160 = 0,2$ (20%).

Un detalle: en principio, si un suceso tiene una probabilidad de ocurrir del 1%, podríamos decir que es un suceso poco probable. Pero ¡cuidado!, supongamos que vamos al dentista y que nos va a anestesiarse para empastar una muela, pero antes nos advierte de que existe una probabilidad del 1% que como efecto secundario de la anestesia perdamos definitivamente la movilidad del brazo, ¿a que el 1% ya no te parece una probabilidad tan baja? Seguro que le dices que aunque no seas de Bilbao, te puede empastar sin anestesia. En cambio, si el hombre del tiempo dice que la probabilidad de precipitación es del 1% para el fin de semana, seguro que no sales con paraguas a dar un paseo ni cambias tus planes por el tiempo. En conclusión, los valores hay que interpretarlos en un contexto o asociándolos al significado de la variable.

Cerramos este apartado sobre probabilidad con una frase del ya nombrado físico y matemático Pierre Simon Laplace: «Hay cosas inciertas para nosotros, cosas más o menos probables, y nosotros tratamos de comprender la imposibilidad de conocerlas por el procedimiento de establecer sus diversos grados de probabilidad. En consecuencia, debemos a la debilidad de la mente

humana una de las teorías matemáticas más delicadas e ingeniosas, la ciencia del azar o de la probabilidad».

... Y para terminar

En una tertulia de la radio, uno de los tertulianos anunció a bombo y platillo el lanzamiento de un revolucionario cosmético hecho a base de aceite de oliva y huevo. El moderador del programa le dijo: «Eso ya existe, se llama mayonesa».

Quizá este libro dentro de la didáctica de la matemática sea mayonesa, pero si está bien hecha es un alimento rico y saludable. Yo he puesto mi empeño en ello, pero el comensal eres tú.

Muchas gracias por probar mi receta y espero que la hayas disfrutado o, al menos, que no hayas pensado ¿por qué la ha hecho?

Ángel Hernández

Índice

Anteportada	2
Colección	4
Portada	5
Página de derechos de autor	7
Índice	8
Para empezar	11
1. LOS NÚMEROS	15
1. QUÉ SON Y PARA QUÉ SIRVEN LOS NÚMEROS	15
2. NUESTRO SISTEMA DE NÚMEROS: EL SISTEMA NUMÉRICO DECIMAL	18
3. LOS NÚMEROS NATURALES	20
3.1. Cuáles son y para qué sirven	20
3.2. Los números primos y compuestos	21
3.3. Los números naturales y la recta numérica	22
4. LOS NÚMEROS NEGATIVOS Y LOS ENTEROS	23
4.1. Los números negativos	23
4.2. Los números enteros	24
4.3. Comparación y ordenación de números enteros. Representación en la recta numérica	24
5. LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS	26
5.1. Cuáles son y para qué sirven	26
5.2. Fracciones equivalentes	28
5.3. Comparación de fracciones	29
5.4. Representación en la recta numérica de las fracciones	30
6. LOS NÚMEROS DECIMALES	31
6.1. Cuáles son	31
6.2. Unidad, décima, centésima y milésima	32
6.3. Cómo observar los números decimales	33
6.4. Comparación de números decimales	34
6.5. Los números decimales y las fracciones	35
6.6. Representación en la recta numérica de los números decimales	36
7. LOS NÚMEROS RACIONALES	37

8. EL CERO Y EL UNO	38
2. LAS OPERACIONES	40
1. OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES	40
1.1. Aproximación al algoritmo de la suma	41
1.2. Aproximación al algoritmo de la resta	43
1.3. Aproximación al algoritmo de la multiplicación	45
1.4. Aproximación al algoritmo de la división	47
1.5. Propiedades de las operaciones aritméticas básicas: propiedad conmutativa, asociativa y distributiva	48
1.6. Iniciación a la potenciación	51
1.7. Raíz cuadrada	54
2. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS	55
2.1. Suma de un número negativo	55
2.2. Resta de un número negativo	56
3. OPERACIONES CON NÚMEROS FRACCIONARIOS	56
3.1. Suma y resta de fracciones de igual denominador	56
3.2. Suma y resta de fracciones con distinto denominador	58
3.3. Fracción de un número	59
4. RAZÓN, PROPORCIÓN Y PORCENTAJE	60
5. PROPORCIONALIDAD	63
3. GEOMETRÍA	68
1. QUÉ ES Y PARA QUÉ SIRVE	68
2. ELEMENTOS BÁSICOS	69
2.1. El punto	70
2.2. La recta	70
2.3. El plano	71
2.4. Ángulos	72
3. LA GEOMETRÍA EN DOS DIMENSIONES: LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS	76
3.1. Los polígonos	76
3.2. La circunferencia y el círculo	80
3.3. Cómo observar figuras geométricas	81
4. ÁREA Y PERÍMETRO DE UNA FIGURA	82
4.1. Perímetro	82
4.2. Área	84

5. LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS	90
5.1. Qué son y cómo se clasifican	90
5.2. Cómo observar cuerpos geométricos	93
6. ÁREA Y VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS	94
6.1. Cómo calcular el área de los cuerpos geométricos: poliedros y cilindros	94
6.2. Volumen de cuerpos geométricos	96
7. PLANO Y COORDENADAS CARTESIANAS	98
4. ESTADÍSTICA	105
1. QUÉ ES Y PARA QUÉ SIRVE LA ESTADÍSTICA	105
2. LOS DATOS	106
3. LA ORGANIZACIÓN DE LOS DATOS	106
4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS DATOS	111
5. LAS MEDIDAS DE POSICIÓN: LA MEDIA Y LA MODA	112
5.1. Media aritmética (o simplemente media)	113
5.2. La moda	115
6. MEDIDAS DE DISPERSIÓN: EL RANGO	117
7. LOS EXPERIMENTOS ALEATORIOS	120
7.1. Qué es un experimento aleatorio	120
7.2. La observación de los experimentos aleatorios	120
8. QUÉ ES LA PROBABILIDAD	122
... Y para terminar	129